

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

LUC ILLUSIE

Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline

Annales scientifiques de l'É.N.S. 4^e série, tome 12, n° 4 (1979), p. 501-661

[<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1979_4_12_4_501_0>](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1979_4_12_4_501_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPLEXE DE DE RHAM-WITT ET COHOMOLOGIE CRISTALLINE

PAR LUC ILLUSIE (*)

INTRODUCTION

Ce travail, dont les principaux résultats ont été annoncés dans [36], prolonge l'article de Bloch [12]. Il comprend deux parties. La première est consacrée à l'étude d'un complexe, le complexe de De Rham-Witt, qui généralise le complexe des courbes typiques de [12]. Sa construction, d'après une esquisse de Deligne [21], est indépendante de [12], et entièrement élémentaire; elle n'utilise pas de K-théorie. Le complexe de De Rham-Witt est une algèbre différentielle graduée définie sur tout schéma X de caractéristique $p > 0$ comme quotient du complexe de De Rham (convenablement complété) de l'anneau des vecteurs de Witt $W \mathcal{O}_X$ par certaines relations. Sa composante de degré 0 est $W \mathcal{O}_X$, et il est muni d'opérateurs F et V prolongeant ceux de $W \mathcal{O}_X$ et donnant lieu à un formulaire analogue à celui de [12]. Les idéaux différentiels gradués engendrés par les $V^n W \mathcal{O}_X$ définissent sur le complexe de De Rham-Witt une filtration canonique, dont le gradué associé s'explique, quand X est lisse sur une base S parfaite, en termes des modules de différentielles ordinaires $\Omega_{X/S}^i$ et de l'opération de Cartier, par des suites exactes analogues à celles décrivant la structure locale du complexe des courbes typiques [12]. Ce calcul utilise quelques résultats techniques sur l'itération de l'opération de Cartier, que nous avons placés dans une section préliminaire, en même temps que divers rappels sur les vecteurs de Witt et la cohomologie cristalline. Une des vertus essentielles du complexe de De Rham-Witt est de permettre, pour X lisse sur S parfait, le calcul de la cohomologie cristalline de X par rapport aux $W_n(S)$, munie de son endomorphisme de Frobenius. Nous montrons par ailleurs que, si S est le spectre d'un corps parfait de caractéristique $p > 2$ et X lisse sur S de dimension $< p$, le complexe de De Rham-Witt et le complexe de Bloch sont canoniquement isomorphes. Le formalisme décrit ici apparaît donc comme une généralisation naturelle — et un enrichissement — de celui de [12]. Une fois la machine montée, il n'est pas difficile d'étendre, dans la deuxième partie, les résultats globaux de [12], notamment la suite spectrale des pentes et la comparaison de la

(*) Équipe de recherche associée au C.N.R.S. n° 653.

cohomologie cristalline à la cohomologie plate, aux schémas propres et lisses sur un corps parfait de caractéristique $p > 0$ quelconque, sans restriction de dimension. Nous avons ajouté quelques compléments sur la suite spectrale des pentes, dus essentiellement à Nygaard ([54], [55]), et sur la torsion du H^2 cristallin, en liaison avec les constructions d'Oda [56]. Ces questions seront reprises dans [37]. Nous espérons aussi pouvoir développer un jour une variante relative de la théorie présentée ici.

Je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à Bloch et Deligne, qui m'ont fourni les bases de ce travail, et, par de multiples suggestions, m'ont aidé à le mener à bien. Une version préliminaire avait été exposée dans un cours à Orsay [35], dont je remercie les auditeurs pour leurs questions. Je remercie également Nygaard, pour un long et stimulant échange de correspondance, ainsi que Berthelot, Katz, Messing, Milne, Ogus pour de fructueux entretiens. Enfin, je voudrais remercier tout particulièrement Raynaud, pour l'intérêt constant qu'il a porté à ce travail depuis son début, et pour les améliorations de rédaction et les nombreux prolongements qu'il m'a suggérés.

TABLE DES MATIÈRES

CONVENTIONS ET NOTATIONS	503
0. PRÉLIMINAIRES	504
1. Vecteurs de Witt	504
2. Opération de Cartier	513
2.1. Définition de C et C^{-1}	513
2.2. Opération de Cartier itérée.	518
2.3. Relèvements de Frobenius	522
2.4. Différentielles logarithmiques	527
2.5. Formes indéfiniment fermées.	531
3. Cohomologie cristalline.	534
3.1. PD-Complexes de De Rham.	534
3.2. Calcul de la cohomologie cristalline.	536
I. COMPLEXE DE DE RHAM-WITT	541
1. Pro-complexe de De Rham-Witt d'un topos annelé en $\mathbb{F}_p$ -algèbres	543
2. Calcul de $W_*\Omega_X^\bullet$ pour $X = (G_a^r \times G_m^s)_{\mathbb{F}_p}$. L'opérateur F	550
A. Formes entières	550
B. Énoncé du théorème principal	553
C. Graduation et bases canoniques	553
D. Démonstration de 2.5 et corollaires.	558
E. L'opérateur F . Formulaire	562
F. Compléments sur le complexe des formes entières	565
3. Étude de $W_*\Omega_X^\bullet$ pour X lisse sur une base parfaite.	567
A. La filtration canonique	567
B. Structure de $\text{gr } W_*\Omega_X^\bullet$	570
C. Noyau et conoyau de F (resp. V).	574
D. Filtration canonique et filtration p -adique	576
E. Cycles de $W_*\Omega_X^\bullet$	579
F. Points fixes de F	580
G. Complément sur la filtration canonique	582
4. Torsion du complexe de De Rham de $W\mathcal{O}_X$	583

5. Comparaison avec le complexe des courbes typiques de Bloch	590
II. SUITE SPECTRALE DES PENTES ET APPLICATIONS	598
1. Le théorème de comparaison	600
2. Résultats de finitude.	607
A. Topologie standard des $H^j(W\Omega_X^i)$	607
B. Perfection de $R\Gamma(W\Omega_X^i)$	610
C. Finitude modulo torsion des $H^j(W\Omega_X^i)$	611
D. Cas de finitude sur W des $H^j(W\Omega_X^i)$	613
3. Suite spectrale des pentes	614
A. Dégénérescence modulo torsion.	614
B. Critère de dégénérescence en E_1	617
C. Dégénérescences partielles.	617
4. Polygones de Newton, conjecture de Katz	620
5. Comparaison avec la cohomologie étale et la cohomologie plate.	626
A. Suites exactes fondamentales	626
B. Inégalité d'Igusa-Artin-Mazur	628
C. Noyau de l'endomorphisme $F - p$ de $H^2(X/W)$	631
D. Compléments sur les surfaces	638
6. Covecteurs et torsion de la cohomologie cristalline.	639
A. Covecteurs et V -torsion de $H^*(W\mathcal{O}_X)$	639
B. Torsion divisorielle de $H^2(X/W)$	642
C. Lien avec $H_{DR}^1(X/k)$ et le sous-espace d'Oda.	644
7. Exemples	651
7.1. Surfaces abéliennes	651
7.2. Surfaces $K3$	653
7.3. Surfaces d'Enriques	654
BIBLIOGRAPHIE	659

Conventions et notations

La lettre p désigne un nombre premier fixé.

Les anneaux considérés sont commutatifs (et unitaires), sauf mention du contraire.

Les algèbres différentielles graduées sont supposées à degré ≥ 0 , et strictement anticommutatives [cf. (0.3.1.1)].

Si L est un faisceau, la notation $x \in L$ signifie que x est une section locale de L . On dira souvent « section » pour « section locale ».

Abréviations et notations usuelles :

adg, algèbre différentielle graduée;

DR, de Rham;

$\Omega_{B/A}^\bullet$, complexe de De Rham de B/A ;

$\Omega_B^\bullet = \Omega_{B/\mathbb{Z}}^\bullet$;

$W(A)$ (ou WA), anneau des vecteurs de Witt sur A ;

$W_n(A)$ (ou $W_n A$), anneau des vecteurs de Witt sur A de longueur n ;

$\underline{x} = (x, 0, \dots, 0, \dots) \in W(A)$ [ou $W_n(A)$], pour $x \in A$: voir (0.1.1.7);

σ , automorphisme de Frobenius de $W(k)$ [ou $W_n(k)$] pour k parfait de car. p ;

$W.\Omega_X^\bullet$, pro-complexe de De Rham-Witt de X (I 1.12);
 $W\Omega_X^\bullet$, complexe de De Rham-Witt de X (I 1.15);
 $\text{Fil}^i W.\Omega_X^\bullet$, $\text{Fil}^i W\Omega_X^\bullet$, filtration canonique (I 3.1);
 $H^n(L) = H^n(X, L)$ (L faisceau ou complexe de faisceaux sur X) (II 2);
 F, V , opérateurs sur le complexe de DR-Witt (I 2 E);
 $F = p^i F$ en degré i (I 2 E), et frobenius de la cohomologie cristalline (II 2 B).

0. — Préliminaires

Cette partie se compose essentiellement de rappels. Le n° 1 résume la théorie classique des vecteurs de Witt (*cf.* [65], II, [3], [22], [23], [24], [12], I 1, [19] [45]), avec quelques compléments sur la section de Cartier, les puissances divisées, et la localisation étale, qui seront utiles à divers endroits des chapitres I et II. En 2.1, nous rappelons la définition et les principales propriétés des opérations de Cartier C et C^{-1} , notamment le théorème de Cartier sur la caractérisation des différentielles localement logarithmiques de degré 1 comme 1-formes fermées fixes par C . Les développements un peu techniques de 2.2 et 2.3 préparent certains calculs du chapitre I. En 2.4 et 2.5, nous exposons deux résultats inédits, l'un de Bloch, généralisant aux formes de degré ≥ 2 le théorème de Cartier mentionné ci-dessus, l'autre de Raynaud, donnant une décomposition canonique, sous l'opération de Cartier, du faisceau des formes indéfiniment fermées. Ces compléments ne sont pas essentiels pour la suite [ils ne serviront qu'incidemment en (I 5.7) et (II 6.14)], mais nous les utiliserons dans [37]. Le n° 3 est préliminaire au théorème de comparaison de (II 1), nous y rappelons le calcul de la cohomologie cristalline à l'aide d'un complexe de De Rham.

1. VECTEURS DE WITT.

1.1. Soit A un anneau. On note $W(A)$ l'anneau des vecteurs de Witt de A relatif au nombre premier p . Par définition ([65], II, § 6), l'ensemble sous-jacent à $W(A)$ est $A^{\mathbb{N}}$; tout vecteur de Witt $a \in W(A)$ s'écrit donc $a = (a_0, \dots, a_n, \dots)$, où les a_n sont les coordonnées de a . Pour $a, b \in W(A)$, la somme $a + b$ et le produit ab dans $W(A)$ sont définis par

$$(1.1.1) \quad \begin{cases} a + b = (S_0(a, b), \dots, S_n(a, b), \dots), \\ ab = (P_0(a, b), \dots, P_n(a, b), \dots), \end{cases}$$

où les S_n (resp. P_n) sont certains polynômes universels à coefficients entiers en les coordonnées de a et b d'indice $\leq n$ (voir *loc. cit.*) :

$$\begin{aligned} S_0(a, b) &= a_0 + b_0, \quad S_1(a, b) = a_1 + b_1 + \sum_{0 < i < p} p^{-1} \binom{p}{i} a_0^i b_0^{p-i}, \dots, \\ P_0(a, b) &= a_0 b_0, \quad P_1(a, b) = b_0^p a_1 + b_1 a_0^p + p a_1 b_1, \dots
 \end{aligned}$$

L'élément unité de $W(A)$ est le vecteur $(1, 0, \dots, 0, \dots)$.

$$(1.1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} w_0 = a_0, \\ w_1 = a_0^p + p a_1, \\ \dots \dots \dots \\ w_n = a_0^{p^n} + p a_0^{p^{n-1}} + \dots + p^n a_n. \end{array} \right.$$
$$(1.1.3) \quad w: \mathbf{W}(A) \rightarrow A^{\mathbb{N}}$$

Soit n un entier ≥ 1 . L'ensemble A^n , muni de l'addition (resp. multiplication) définie par les polynômes S_i (resp. P_i) pour $i \leq n-1$, est un anneau quotient de $W(A)$, noté $W_n(A)$, et appelé anneau des *vecteurs de Witt* de A de longueur n . On a $W_1(A) = A$, et $W(A)$ est limite projective des $W_n(A)$ suivant les homomorphismes (surjectifs), dits de *restriction*

L'homomorphisme (additif) :

dit *décalage* (ou *Verschiebung*), définit, par passage au quotient, $V: W_n(A) \rightarrow W_{n+1}(A)$, et l'on a des suites exactes

$$(1.1.6) \quad \begin{cases} 0 \rightarrow W(A) \xrightarrow{V^n} W(A) \rightarrow W_n(A) \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow W_r(A) \xrightarrow{V^n} W_{n+r}(A) \xrightarrow{R^r} W_n(A) \rightarrow 0. \end{cases}$$

Pour $x \in A$, on appelle *représentant multiplicatif* de x le vecteur

(tel que $\underline{x}_i=0$ pour $i>0$, $\underline{x}_0=x$). On note encore $\underline{x}$ l'image de l'élément précédent dans $W_n(A)$. L'application $x \mapsto \underline{x}$ est une section multiplicative de la projection canonique $W(A) \rightarrow W_1(A)=A$: pour $x, y \in A$, on a

Plus généralement, pour $x \in A$, $a = (a_0, a_1, \dots) \in W(A)$, on a

$$(1.1.9) \quad x a = (x a_0, x^p a_1, \dots, x^{p^n} a_n, \dots).$$

Tout vecteur de Witt $a = (a_0, a_1, \dots)$ s'écrit :

$$(1.1.10) \quad a = \sum_{n=0}^{\infty} V^n \underline{a}_n.$$

(Pour tout ce qui précède, voir [65], II, § 6).

1.2. Soit A un anneau. Notons $\mathbf{W}(A)$ l'anneau de Witt universel à coefficients dans A ([3], [19], [22], [23]). Le groupe additif sous-jacent à $\mathbf{W}(A)$ est le groupe multiplicatif $1 + tA[[t]]$, la multiplication dans $\mathbf{W}(A)$ est définie, par bilinéarité, à partir de la règle

$$(1.2.1) \quad (1 - at)^{-1} \cdot (1 - bt)^{-1} = (1 - abt)^{-1}, \quad a, b \in A$$

(nous suivons ici la convention de [12], I 1, qui diffère de celle de [3]). L'élément unité est $(1 - t)^{-1}$.

Supposons que A soit une $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre. Alors ([19], [12], I 1) l'exponentielle d'Artin-Hasse :

$$(1.2.2) \quad E(t) = \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^{p^n}/p^n\right),$$

qui, en vertu de la formule

$$(1.2.3) \quad E(t) = \prod_{n \in I(p)} (1 - t^n)^{-\mu(n)/n}$$

[où $I(p)$ est l'ensemble des entiers ≥ 1 non divisibles par p , et μ la fonction de Möbius], appartient à $\mathbf{W}(\mathbb{Z}_{(p)})$, définit un idempotent de $\mathbf{W}(A)$. Pour $x \in A$, on a

$$(1.2.4) \quad E(t) \cdot (1 - xt^m)^{-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ n'est pas une puissance de } p, \\ E(xt^{p^n}) & \text{si } m = p^n, \quad n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Si $\mathbf{W}^{(p)}(A)$ désigne le facteur direct de $\mathbf{W}(A)$ défini par $E(t)$, l'application

$$(1.2.5) \quad \mathbf{W}(A) \rightarrow \mathbf{W}^{(p)}(A), (a_0, a_1, \dots) \mapsto \prod_{n=0}^{\infty} E(a_n t^{p^n})$$

est un isomorphisme d'anneaux. L'endomorphisme additif V_p de $\mathbf{W}(A)$, défini par

$$(1.2.6) \quad (V_p f)(t) = f(t^p), \quad f \in \mathbf{W}(A),$$

laisse stable $\mathbf{W}^{(p)}(A)$, et l'endomorphisme induit s'identifie, par (1.2.3), au décalage V (1.1.5). Enfin, on a un carré commutatif

$$(1.2.7) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbf{W}(A) & \xrightarrow{(1.2.5)} & \mathbf{W}^{(p)}(A) \\ (1.1.2) \downarrow w & & \downarrow td \log / d \\ A^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & A[[t]] \\ (b_0, b_1, \dots) & \mapsto & \sum b_r t^{p^r}. \end{array} \right.$$

$$(1.3.1) \quad F: W \rightarrow W,$$
$$(1.3.2) \quad \left\{ \begin{array}{ccc} W(A) & \xrightarrow{F} & W(A) \\ w \downarrow & & \downarrow w \quad (1.1.2) \\ A^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\quad} & A^{\mathbb{N}} \\ (x_0, x_1, \dots) & \mapsto & (x_1, x_2, \dots). \end{array} \right.$$
$$(1.3.3) \quad Fa = (f_0(a), \dots, f_n(a), \dots),$$
[illegible]
$$(1.3.5) \quad f_n(a) = a_n^p \bmod p;$$
$$(1.3.6) \quad xV y = V(F x, y), \quad x, y \in W(A),$$

$$(1.3.7) \quad \mathbf{FV} = p,$$

$$(1.3.8) \quad \text{VF} = p \Leftrightarrow p = 0 \text{ dans } A.$$

$$(1.3.9) \quad (F_p u)(t) = \prod_{1 \leq i \leq p} u(z_i t^{1/p}),$$

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

Pour tout anneau A , F induit des homomorphismes d'anneaux

$$(1.3.10) \quad F: W_{n+1}(A) \rightarrow W_n(A), \quad n \text{ entier } \geq 1,$$

et l'on a $FV = p$ dans $W_n(A)$. Quand A est de car. p , (1.3.10) induit un endomorphisme de $W_n(A)$, encore noté F , et l'on a alors [dans $W_n(A)$] :

$$(1.3.11) \quad RFV = FVR = p,$$

où $R: W_{n+1}(A) \rightarrow W_n(A)$ est l'homomorphisme de restriction (1.1.4).

Soit A une $\mathbb{F}_p$ -algèbre. Des formules (1.3.6) à (1.3.8) on déduit que l'on a, quels que soient $m, n \in \mathbb{N}$, $x, y \in W(A)$:

$$(1.3.12) \quad V^m x \cdot V^n y = V^{m+n} (F^n x \cdot F^m y).$$

En particulier, on a

$$(1.3.13) \quad V^m W(A) \cdot V^n W(A) \subset V^{m+n} W(A),$$

autrement dit la V -filtration (1.1) de $W(A)$ est compatible à la structure d'anneau. On notera $\text{gr}_V W(A)$ l'anneau gradué correspondant, et de même, pour n entier ≥ 1 , $\text{gr}_V W_n(A)$ l'anneau gradué associé à la V -filtration de $W_n(A)$, définie par les sous-groupes $V^i W_{n-i}(A)$, $i \geq 0$ [en convenant que $V^i W_{n-i}(A) = 0$ pour $i \geq n$]. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $F_*^n A$ le A -module défini par A considéré comme A -module par la restriction des scalaires suivant F^n , où F est le Frobenius de $W_1(A) = A$, i.e. l'élévation à la puissance p -ième. Il découle de (1.3.12) que l'application

$$(1.3.14) \quad F_*^n A \rightarrow \text{gr}_V^n W(A), \quad x \mapsto V^n \underline{x} \bmod V^{n+1} W(A)$$

est un isomorphisme de A -modules. Les isomorphismes (1.3.14) définissent un isomorphisme d'algèbres graduées

$$(1.3.15) \quad \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} F_*^n A \xrightarrow{\sim} \text{gr}_V W(A),$$

la structure d'anneau gradué du premier membre étant donné par

$$F_*^m A \otimes F_*^n A \rightarrow F_*^{m+n} A, \quad x \otimes y \mapsto F^n x \cdot F^m y.$$

Soit maintenant A un anneau sans p -torsion, muni d'un endomorphisme f tel que, pour tout $x \in A$, $f(x) = x^p \bmod pA$ (autrement dit, relevant l'endomorphisme de Frobenius de A/pA). D'après un lemme de Dieudonné-Cartier, il existe un unique homomorphisme d'anneaux

$$(1.3.16) \quad s_f: A \rightarrow W(A),$$

qui soit section de la projection canonique $W(A) \rightarrow A$ et tel que $s_f \circ f = F \circ s_f$. Pour une démonstration, voir [45], VII, § 4 : pour $x \in A$, $s_f(x) = (s_0, \dots, s_n, \dots) \in W(A)$ est l'unique

solution des équations

$$(1.3.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i.e. :} \\ w_n(s_f(x)) = f^n x \quad (n \in \mathbb{N}), \\ s_0^{p^n} + ps_1^{p^{n-1}} + \dots + p^n s_n = f^n x. \end{array} \right.$$

En particulier, si x est tel que $f(x) = x^p$ [donc $f^n(x) = x^{p^n}$ pour tout $n \geq 0$], il résulte de (1.3.17) que

$$(1.3.18) \quad s_f(x) = \underline{x}$$

[avec la notation (1.1.7)]. L'homomorphisme s_f dépend fonctoriellement du couple (A, f) : si B est un anneau sans p -torsion, muni d'un endomorphisme g relevant le frobenius de B/pB , et si $u : A \rightarrow B$ est un homomorphisme tel que $u \circ f = g \circ u$, on a un carré commutatif

$$(1.3.19) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{s_f} & W(A) \\ u \downarrow & & \downarrow W(u) \\ B & \xrightarrow{s_g} & W(B) \end{array}$$

Cela résulte immédiatement de (1.3.17). On notera

$$(1.3.20) \quad t_f : A \rightarrow W(A/pA),$$

le composé de s_f et de la projection canonique $W(A) \rightarrow W(A/pA)$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_f(p^n A) \subset p^n W(A/pA) = V^n F^n W(A/pA)$, donc t_f induit, pour tout $n \geq 1$:

$$(1.3.21) \quad t_f : A/p^n A \rightarrow W_n(A/pA).$$

PROPOSITION 1.3.22. — Si A/pA est parfait, i.e. tel que le frobenius de A/pA soit un automorphisme, (1.3.21) est un isomorphisme.

Il revient en effet au même de prouver que l'homomorphisme $\text{gr}_p A \rightarrow \text{gr}_V W(A/pA)$ induit par t_f est un isomorphisme. Or, abrégeant t_f en t , on a, pour $x \in A$:

$$t(p^n x) = p^n tx = V^n F^n tx = V^n t f^n x.$$

Si $\bar{x}$ est l'image de x dans A/pA , on a $t f^n x = \underline{F^n \bar{x}}$ mod $VW(A/pA)$, donc

$$t(p^n x) = V^n(\underline{F^n \bar{x}}) \text{ mod } V^{n+1}W(A/pA).$$

On a par suite un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} A/pA & \xrightarrow{F^n} & F_*^n(A/pA) \\ p^n \downarrow & & \downarrow (1.3.14) \\ p^n A/p^{n+1} A & \xrightarrow{\text{gr}^n t} & V^n W(A/p)/V^{n+1} W(A/pA). \end{array}$$

Comme A/pA est parfait, la flèche horizontale supérieure est un isomorphisme, d'où la conclusion.

COROLLAIRE 1.3.23. — Si A/pA est parfait, et si A est p -adiquement séparé et complet (i.e. tel que $A = \varprojlim A/p^n A$), (1.3.20) est un isomorphisme.

Remarque 1.3.24. — Soit A un anneau p -adiquement séparé et complet, sans p -torsion, tel que A/pA soit parfait. D'après [65], II, prop. 10, il existe un unique endomorphisme f de A relevant le frobenius de A/pA , caractérisé par $f(x) = x^p$ pour tout représentant multiplicatif x . Il résulte de (1.3.18) que l'inverse de l'isomorphisme $t_f: A \xrightarrow{\sim} W(A/pA)$ est donné par

$$(a_0, \dots, a_n, \dots) \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \rho(a_i)^{p^{-i}} p^i,$$

où $\rho: A/pA \rightarrow A$ est le système de représentants multiplicatifs (cf. [65], II, th. 7).

1.4. Puissances divisées. — Soit A une $\mathbb{F}_p$ -algèbre. $W(A)$ est donc, de façon naturelle, une $\mathbb{Z}_p$ -algèbre ($W(\mathbb{F}_p) = \mathbb{Z}_p$). Pour tout entier $n \geq 1$, et tout $x \in W(A)$, on a

$$(1.4.1) \quad (Vx)^n = p^{n-1} Vx^n.$$

En effet, d'après les formules (1.3.6) à (1.3.8), on a

$$Vx \cdot (Vx)^{n-1} = V(xF(Vx)^{n-1}) = V(x(FVx)^{n-1}) = p^{n-1} Vx^n.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit

$$(1.4.2) \quad \gamma_n: VW(A) \rightarrow W(A),$$

l'application définie par

$$(1.4.3) \quad \gamma_n(Vx) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=0, \\ (p^{n-1}/n!) Vx^n & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

(rappelons que, si $n \geq 1$, $p^n/n! \in p\mathbb{Z}_p$). Comme le suggère (1.4.1), les applications γ_n définissent sur $VW(A)$ une structure d'idéal à puissances divisées ([4], I 1.1, cf. [12], I, § 4, n° 5). Pour le vérifier, on se ramène, pour chacune des identités à prouver, au cas où A est une algèbre de polynômes sur $\mathbb{F}_p$, le frobenius F de $W(A)$ est alors injectif, et la formule voulue résulte de ce que $F\gamma_n(Vx) = (p^n/n!)x^n$. La PD-structure ([4], loc. cit.) ainsi définie sur $VW(A)$ sera dite *canonique*. Noter que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in W(A)$, on a

$$(1.4.4) \quad \gamma_n(px) = (p^n/n!)x^n.$$

L'endomorphisme F est donc un PD-morphisme. Si A est un anneau parfait, on a $VW(A) = pW(A)$, et (1.4.4) montre que la PD-structure canonique est la structure habituelle. Pour tout entier $m \geq 1$, les formules (1.4.3) définissent une PD-structure sur l'idéal $VW_m(A)$ de $W_{m+1}(A)$, qui sera dite canonique. La projection canonique

$W(A) \rightarrow W_{m+1}(A)$ est un PD-morphisme. Pour tout homomorphisme $A \rightarrow B$, l'homomorphisme correspondant $W(A) \rightarrow W(B)$ [resp. $W_m(A) \rightarrow W_m(B)$] est un PD-morphisme.

Tout élément $x = (x_0, \dots, x_n, \dots)$ de $W(A)$ s'écrit, d'après (1.1.10);

$$(1.4.5) \quad x = x_0 + V x_+,$$

où $x_+ = (x_1, \dots, x_n, \dots)$ [i.e. $(x_+)_n = x_{n+1}$]. Notons

$$(1.4.6) \quad \alpha : W(A) \rightarrow W(A),$$

l'application définie par

$$(1.4.7) \quad \alpha(x) = x_+ - \sum_{0 < i < p} p^{-1} \binom{p}{i} x_0^{p-i} (V x_+)^i - (p-1)! \gamma_p(V x_+).$$

De (1.4.5) on tire $F x = x_0^p + p x_+$, et comme $(V x_+)^p = p! \gamma_p(V x_+)$, on en déduit que l'on a, pour tout $x \in W(A)$:

$$(1.4.8) \quad F x = x^p + p \alpha(x).$$

Soit n un entier ≥ 1 . Tout élément $x = (x_0, \dots, x_n) \in W_{n+1}(A)$ s'écrit $x = x_0 + V x_+$, où ici $x_+ = (x_1, \dots, x_n)$. Définissons

$$(1.4.9) \quad \alpha : W_{n+1}(A) \rightarrow W_n(A),$$

par

$$(1.4.10) \quad \alpha(x) = x_+ - \sum_{0 < i < p} p^{-1} \binom{p}{i} x_0^{p-i} R(V x_+)^i - (p-1)! R \gamma_p(V x_+).$$

On a alors, pour tout $x \in W_{n+1}(A)$:

$$(1.4.11) \quad R F x = R x^p + p \alpha(x).$$

Noter aussi que, comme $R V = V R$, et $R(x_+) = (R x)_+$, on a

$$(1.4.12) \quad R \alpha = \alpha R.$$

1.5. Localisation. — Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un topos annelé, et n un entier ≥ 1 . Le préfaisceau $U \mapsto W(\mathcal{O}_X(U))$ [resp. $W_n(\mathcal{O}_X(U))$] est un faisceau, qu'on notera $W(\mathcal{O}_X)$ [resp. $W_n(\mathcal{O}_X)$]. Le topos annelé $(X, W(\mathcal{O}_X))$ [resp. $(X, W_n(\mathcal{O}_X))$] sera noté aussi

$$(1.5.1) \quad W(X) \quad [\text{resp. } W_n(X)].$$

De même, le préfaisceau $U \mapsto W(\mathcal{O}_X(U))$ (1.2) [resp. $U \mapsto W^{(p)}(\mathcal{O}_X(U))$], si $\mathcal{O}_X$ est une $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algèbre] est un faisceau, qu'on notera $W(\mathcal{O}_X)$ [resp. $W^{(p)}(\mathcal{O}_X)$]. Les applications définies aux numéros précédents [$w, R, V, F, (1.2.5), s_f, t_f, \gamma_n, \alpha$] se faisceautisent.

Supposons que X soit de car. p (i.e. que $\mathcal{O}_X$ soit une $\mathbb{F}_p$ -algèbre). D'après (1.3.13), on a alors $(VW_{n-1}(\mathcal{O}_X))^n = 0$, $W_n(X)$ est donc un voisinage infinitésimal d'ordre $n-1$ de $X = W_1(X)$. Par suite, si X est annelé en anneaux locaux [i.e. (SGA 4 IV 13.9)] si, pour tout $U \in \text{ob } X$, et toute section $s \in \mathcal{O}_X(U)$, on a $U = \sup(U_s, U_{1-s})$, où U_s (resp. U_{1-s}) est le plus grand sous-objet de U où s (resp. $1-s$) est inversible], il en est de même de $W_n(X)$, et pour tout point x de X , on a un isomorphisme canonique d'anneaux locaux

$$(1.5.2) \quad W_n(\mathcal{O}_{X,x}) \xrightarrow{\sim} W_n(\mathcal{O}_X)_x$$

(car, plus généralement, W_n commute aux limites inductives filtrantes).

Si A est une $\mathbb{F}_p$ -algèbre, et si $s \in W_n(A)$, on a $W_n(A)_s = W_n(A)_{s_0}$ [car $(s-s_0)^n = 0$], et il résulte de (1.1.9) que l'application canonique $W_n(A) \rightarrow W_n(A_{s_0})$ induit un isomorphisme

$$(1.5.3) \quad W_n(A)_s \xrightarrow{\sim} W_n(A_{s_0})$$

(cf. [12], I, § 4, 5.1). Il s'ensuit que si X est un $\mathbb{F}_p$ -schéma, $W_n(X)$ est un $(\mathbb{Z}/p^n)$ -schéma, ayant même espace sous-jacent que X . Plus précisément, $W_n(X)$ est un $(\mathbb{Z}/p^n)$ -PD-épaississement de X , $W_n(\mathcal{O}_X)$ étant muni de sa PD-structure canonique (1.4) (qui est compatible à celle de $\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}$ d'après 1.4), cf. [4], III 1.1.1. Pour tout ouvert U de X , $W_n(U)$ est induit sur U par $W_n(X)$. Si X est localement noethérien, et si l'endomorphisme de Frobenius de X est fini, $W_n(X)$ est localement noethérien : en effet, d'après (1.3.15), si A est une $\mathbb{F}_p$ -algèbre noethérienne telle que $F : A \rightarrow A$ soit fini, $\text{gr}_V W_n(A)$ est un anneau noethérien.

Soit $f : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ un morphisme de topos annelés. L'homomorphisme canonique $\mathcal{O}_Y \rightarrow f_* \mathcal{O}_X$ induit $W(\mathcal{O}_Y) \rightarrow W(f_* \mathcal{O}_X) = f_* W(\mathcal{O}_X)$, d'où un morphisme de topos annelés

$$(1.5.4) \quad W(f) : W(X) \rightarrow W(Y).$$

De même, pour tout entier $n \geq 1$, f induit un morphisme de topos annelés

$$(1.5.5) \quad W_n(f) : W_n(X) \rightarrow W_n(Y).$$

Si f est un morphisme de topos localement annelés en $\mathbb{F}_p$ -algèbres, $W_n(f)$ est un morphisme de topos localement annelés (SGA 4 IV 13.9). Donc, si f est un morphisme de $\mathbb{F}_p$ -schémas, $W_n(f)$ est un morphisme de schémas [et même de $(\mathbb{Z}/p^n)$ -schémas].

PROPOSITION 1.5.6. — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de $\mathbb{F}_p$ -schémas, et soit n un entier ≥ 1 .

- (i) Si f est une immersion fermée, d'idéal I , $W_n(f)$ est une immersion fermée, d'idéal $W_n(I)$.
- (ii) Si f est de type fini et si l'endomorphisme de Frobenius de X est fini, $W_n(f)$ est de type fini.

On notera que, si f est de type fini, le Frobenius de X est fini dès que celui de Y l'est. En particulier :

COROLLAIRE 1.5.7. — Supposons Y parfait (i.e. le Frobenius de Y un isomorphisme). Alors, si f est de type fini, il en est de même de $W_n(f)$.

Prouvons 1.5.6. L'assertion (i) est triviale. L'assertion (ii) est essentiellement démontrée dans [12], I, § 4, 5.2. On peut supposer X et Y affines, d'anneaux respectifs B et A . Comme $W_n(f) : W_n(A) \rightarrow W_n(B)$ est compatible à la V -filtration, il suffit de prouver que, si B est de type fini sur A , et $F : B \rightarrow B$ fini, $\text{gr}_V W_n(B)$ est de type fini sur $\text{gr}_V W_n(A)$: or ces hypothèses entraînent, d'après (1.3.15), que $\text{gr}_V W_n(B)$ est de type fini sur A , donc *a fortiori* sur $\text{gr}_V W_n(A)$.

Rappelons que si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme étale de $\mathbb{F}_p$ -schémas, le frobenius relatif $F_{X/Y} : X \rightarrow X^{(p/Y)}$ est un isomorphisme, autrement dit le carré

$$(1.5.7.1) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{F} & X \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y & \xrightarrow{F} & Y \end{array}$$

est cartésien (SGA 5 XIV, § 1, prop. 2) : cela résulte de ce qu'un morphisme radiciel, surjectif, et étale est un isomorphisme (EGA IV 17.9.1).

PROPOSITION 1.5.8. — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme étale de $\mathbb{F}_p$ -schémas, et soit n un entier ≥ 1 . Alors $W_n(f)$ est étale, et les carrés

$$(1.5.8.0) \quad \begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & W_n(X) \\ f \downarrow & & \downarrow W_n(f) \\ Y & \hookrightarrow & W_n(Y) \end{array}$$

$$(1.5.8.1) \quad \begin{array}{ccc} W_n(X) & \xrightarrow{F} & W_n(X) \\ W_n(f) \downarrow & & \downarrow W_n(f) \\ W_n(Y) & \xrightarrow{F} & W_n(Y) \end{array}$$

sont cartésiens.

On peut supposer X et Y affines, d'anneaux respectifs B et A . D'après 1.3.15, $\text{gr}_V W_n(A)$ [resp. $\text{gr}_V W_n(B)$] s'identifie à $\bigoplus_{m < n} F_*^m A$ (resp. $\bigoplus_{m < n} F_*^m B$), et la flèche $B \otimes_A \text{gr}_V W_n(A) \rightarrow \text{gr}_V W_n(B)$ définie par $W_n(f)$ s'identifie à la flèche naturelle $B \otimes_A (\bigoplus_{m < n} F_*^m A) \rightarrow \bigoplus_{m < n} F_*^m B$. Or, le carré (1.5.7.1) étant cartésien, celle-ci est un isomorphisme. Le critère de platitude usuel (Bourbaki, Alg. com., III, § 5, th. 1) entraîne donc, par récurrence sur n , que $W_n(f)$ est plat et le carré (1.5.8.0) cartésien. Comme f est étale, il en est donc de même de $W_n(f)$. Le fait que le carré (1.5.8.1) soit cartésien en résulte, par le même argument que pour (1.5.7.1).

2. OPÉRATION DE CARTIER.

2.1. Définition de C et C^{-1} . — Si X est un schéma de car. p , nous noterons F_X (ou simplement F , s'il n'y a pas de confusion à craindre) l'endomorphisme de Frobenius (absolu) de X . Soit $X \rightarrow S$ un morphisme de $\mathbb{F}_p$ -schémas. Nous noterons $X^{(p/S)}$ (ou $X^{(p)}$) le schéma

déduit de X par le changement de base F_S . Le morphisme F_X se factorise en $F_X = W \circ F_{X/S}$, où le S -morphisme $F_{X/S} : X \rightarrow X^{(p)}$ est par définition le *frobenius relatif* de X/S , et $W_{X/S}$ (ou W) : $X^{(p)} \rightarrow X$ la projection canonique : on a donc un diagramme commutatif où le carré est cartésien :

$$(2.1.1) \quad \begin{array}{ccccc} & & F_X & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ X & \xleftarrow{W} & X^{(p)} & \xleftarrow{F_{X/S}} & X \\ \downarrow & & \downarrow & \nearrow & \\ S & \xleftarrow{F_S} & S & & \end{array}$$

Par exemple, si $X = S[T_1, \dots, T_n]$, on a $X^{(p)} = X$, $W = F_S[T_1, \dots, T_n]$, et $F_{X/S}$ est donné par $T_i \mapsto T_i^p$ ($1 \leq i \leq n$) [voir (SGA 5 XIV) pour divers sorites sur la situation (2.1.1)]. Nous noterons

$$(2.1.2) \quad F_{X/S} : \mathcal{O}_{X^{(p)}} \rightarrow (F_{X/S})_* \mathcal{O}_X,$$

le morphisme canonique : pour toute section locale x de $\mathcal{O}_X$, on a donc

$$(2.1.3) \quad x^p = F_{X/S}(W^* x).$$

Soit $\Omega_{X/S}^\bullet = (\wedge \Omega_{X/S}^1, d = d_{X/S})$ le complexe de De Rham de X/S . La différentielle d est $\mathcal{O}_{X^{(p)}}$ -linéaire, donc

$$Z\Omega_{X/S}^i = \text{Ker } d : \Omega_{X/S}^i \rightarrow \Omega_{X/S}^{i+1}$$

et

$$B\Omega_{X/S}^i = d(\Omega_{X/S}^{i-1})$$

sont des $\mathcal{O}_{X^{(p)}}$ -modules, et $H^*(\Omega_{X/S}^\bullet)$ est une $\mathcal{O}_{X^{(p)}}$ -algèbre graduée. Rappelons [39], 7.1, qu'il existe un unique homomorphisme d'algèbres graduées (unifères) :

$$(2.1.4) \quad C_X^{-1} : \Omega_{X/S}^\bullet \rightarrow W^* H^*(\Omega_{X/S}^\bullet),$$

donné par F_X en degré 0 et tel que l'on ait, pour toute section x de $\mathcal{O}_X$;

$$(2.1.5) \quad C_X^{-1}(dx) = \text{classe de } x^{p-1} dx \text{ dans } H^1(\Omega_{X/S}^\bullet).$$

Comme $\Omega_{X^{(p)}/S}^\bullet = W^* \Omega_{X/S}^\bullet$, C_X^{-1} définit, par adjonction, un homomorphisme de $\mathcal{O}_{X^{(p)}}$ -algèbres graduées

$$(2.1.6) \quad C_{X/S}^{-1} : \Omega_{X^{(p)}/S}^\bullet \rightarrow H^*(\Omega_{X/S}^\bullet),$$

donné par $F_{X/S}$ en degré 0 et tel que

$$(2.1.7) \quad C_{X/S}^{-1}(W^*(dx)) = \text{classe de } x^{p-1} dx$$

(pour toute section locale x de $\mathcal{O}_X$). Les homomorphismes (2.1.4), (2.1.5) sont compatibles à la localisation étale : si $f : X' \rightarrow X$ est étale, on a $\Omega_{X'/S}^\bullet = f^* \Omega_{X/S}^\bullet$,

$F_* H^* \Omega_{X'/S}^\bullet = f^* F_* H^* \Omega_{X/S}^\bullet$, d'où

$$(2.1.8) \quad C_{X'}^{-1} = f^* C_X, \quad C_{X'/S}^{-1} = f^{(p)*} C_{X/S}.$$

Rappelons le résultat fondamental de Cartier :

THÉORÈME 2.1.9 [39], 7.1. — Si X/S est lisse, $C_{X/S}^{-1}$ est un isomorphisme.

Supposons X/S lisse. L'inverse de (2.1.6) définit alors un homomorphisme appelé *opération de Cartier* :

$$(2.1.10) \quad C_{X/S} : Z \Omega_{X/S}^\bullet \rightarrow \Omega_{X^{(p)}/S}^\bullet,$$

dont le noyau est $B \Omega_{X/S}^\bullet$: on a donc une suite exacte (de $\mathcal{O}_{X^{(p)}}$ -modules) :

$$(2.1.11) \quad 0 \rightarrow B \Omega_{X/S}^\bullet \rightarrow Z \Omega_{X/S}^\bullet \xrightarrow{C_{X/S}} \Omega_{X^{(p)}/S}^\bullet \rightarrow 0.$$

Rappelons les résultats de Cartier [18] concernant le calcul de $C_{X/S}$ sur les 1-formes fermées et la caractérisation des différentielles logarithmiques de degré 1. Nous nous sommes inspirés, pour la présentation, de l'exposé de Seshadri [68] et de papiers secrets de Grothendieck [30]. Le lecteur trouvera dans l'article de Katz [41], § 7, un exposé très voisin.

Soit $T_{X/S}$ le faisceau tangent de X/S (c'est le faisceau des S -dérivations de $\mathcal{O}_X$ dans $\mathcal{O}_X$, i.e. le dual de $\Omega_{X/S}^1$). Notons

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \Omega_{X/S}^1 \times T_{X/S} \rightarrow \mathcal{O}_X$$

l'accouplement de dualité. Comme (2.1.2) est injectif ($F_{X/S} : X \rightarrow X^{(p)}$ étant fini localement libre, de rang p^r si X/S est de dimension relative r), la formule suivante [18], chap. 1, (29), détermine $C_{X/S}$ sur les 1-formes fermées : pour tout ouvert U de X , on a, pour $\omega \in Z \Omega_{X/S}^1(U)$, $D \in T_{X/S}(U)$:

$$(2.1.12) \quad F_{X/S} \langle C_{X/S}(\omega), W^* D \rangle = \langle \omega, D^p \rangle - D^{p-1} \langle \omega, D \rangle.$$

En particulier, supposons que des sections $x_1, \dots, x_r$ de $\mathcal{O}_X$ sur U définissent un morphisme étale de U dans $S[T_1, \dots, T_r]$, i.e. que $dx_1, \dots, dx_r$ forment une base de $\Omega_{U/S}^1$, posons $D_i = d/dx_i$ ($1 \leq i \leq r$); alors, si

$$\omega = \sum a_i dx_i \in Z \Omega_{X/S}^1(U),$$

on a

$$C \omega = \sum c_i W^*(dx_i) \quad [c_i \in \mathcal{O}_{X^{(p)}}(U)],$$

avec

$$(2.1.13) \quad F_{X/S}(c_i) = -D_i^{p-1} a_i \quad (1 \leq i \leq r).$$

En effet, $D_i^p = 0$, $\langle \omega, D_i \rangle = a_i$, $\langle C \omega, D_i \rangle = c_i$.

Rappelons la démonstration [68] de (2.1.12). D'après 2.1.9, ω est localement somme de formes du type dx et du type $ay^{p-1}dy$ pour x, y sections locales de $\mathcal{O}_X$, a section locale de $\mathcal{O}_X(p)$. Il suffit donc de vérifier (2.1.12) dans chacun des cas :

(i) $\omega = dx, x \in \mathcal{O}_X(U)$;

(ii) $\omega = ax^{p-1}dx, a \in \mathcal{O}_{X^{(p)}}(U), x \in \mathcal{O}_X(U)$.

Dans le cas (i), on a $C_{X/S}(dx) = 0, \langle dx, D^p \rangle = D^p x, D^{p-1} \langle dx, D \rangle = D^{p-1}(Dx) = D^p x$, et la formule est trivialement vraie. Dans le cas (ii), on peut, par linéarité, supposer $a = 1$. On a $C_{X/S}(x^{p-1}dx) = W^*(dx)$ (2.1.7), d'où

$$\begin{aligned} F_{X/S} \langle C_{X/S}(x^{p-1}dx), W^*D \rangle &= F_{X/S}(W^*Dx) = (Dx)^p \quad (2.1.3), \\ \langle x^{p-1}dx, D^p \rangle &= x^{p-1}D^p x, \quad D^{p-1} \langle x^{p-1}dx, D \rangle = D^{p-1}(x^{p-1}Dx), \end{aligned}$$

et la formule à prouver se réduit à l'identité de Hochschild [68], lemme 2 :

$$(Dx)^p = x^{p-1}D^p x - D^{p-1}(x^{p-1}Dx).$$

Soit E un $\mathcal{O}_X$ -Module quasi cohérent muni d'une connexion intégrable $\nabla : T_{X/S} \rightarrow \text{End}_S(E)$ (l'intégrabilité signifie que ∇ est compatible au crochet, ou, ce qui revient au même, que le composé des homomorphismes induits $E \xrightarrow{\nabla} \Omega_{X/S}^1 \otimes E \xrightarrow{\nabla} \Omega_{X/S}^2 \otimes E$ est nul). Rappelons [39], 5.2 que l'application

$$(2.1.14) \quad \psi_{\nabla} : T_{X/S} \rightarrow F_{X/S} \text{End}_X(E), \quad \psi_{\nabla}(D) = \nabla(D)^p - \nabla(D^p)$$

est un homomorphisme de $\mathcal{O}_X$ -Modules, appelé *p-courbure* de ∇ . D'après Cartier [39], 5.1, $\psi_{\nabla} = 0$ si et seulement si la flèche canonique

$$(2.1.15) \quad F_{X/S}^*(E^{\nabla}) \rightarrow E$$

est un isomorphisme [où E^{∇} est le $\mathcal{O}_{X^{(p)}}$ -Module des sections horizontales, noyau de $\nabla : E \rightarrow \Omega_{X/S}^1 \otimes E$].

Soit U un ouvert de X . Toute connexion ∇ sur $\mathcal{O}_U$ s'écrit de manière unique $\nabla = d + \omega$, où $\omega = \nabla(1) \in \Omega_{X/S}^1(U)$. Pour que ∇ soit intégrable, il faut et il suffit que $d\omega = 0$. Supposons cette condition remplie. Alors ψ_{∇} et $C\omega$ sont reliés par la formule suivante, due à Cartier [18], lemme 4 :

$$(2.1.16) \quad \psi_{\nabla}(D) = F_{X/S} \langle W^*\omega - C\omega, W^*D \rangle,$$

pour tout $D \in T_{X/S}(U)$.

Rappelons la démonstration de (2.1.16) (cf. [4], § 7). Il s'agit de prouver que

$$(D + \langle \omega, D \rangle)^p - (D^p + \langle \omega, D^p \rangle) = \langle \omega, D \rangle^p - F_{X/S} \langle C\omega, W^*D \rangle.$$

Or, d'après l'identité de Jacobson [68], corollaire de la proposition 4, on a

$$(D + \langle \omega, D \rangle)^p = D^p + \langle \omega, D \rangle^p + D^{p-1} \langle \omega, D \rangle.$$

Le premier membre de (2.1.16) s'écrit donc :

$$\langle \omega, D \rangle^p + D^{p-1} \langle \omega, D \rangle - \langle \omega, D^p \rangle,$$

et par suite la formule à prouver résulte de (2.1.12).

La formule (2.1.16) a la conséquence suivante :

THÉORÈME 2.1.17 (Cartier) ([18], prop. 8, [68], § 2, th. 1). — Soient U un ouvert de X , et $\omega \in \Omega_{X/S}^1(U)$ tel que $d\omega = 0$. Pour que l'on ait $C\omega = W^*\omega$, il faut et il suffit qu'il existe localement une section inversible x de $\mathcal{O}_X$ telle que $\omega = dx/x$.

Si $\omega = dx/x$, écrivant $\omega = x^{-p}(x^{p-1}dx)$, on trouve

$$C\omega = x^{-1}C(x^{p-1}dx) = x^{-1}W^*dx = W^*(dx/x).$$

Inversement, si $C\omega = W^*\omega$, la connexion $\nabla = d + \omega$ sur $\mathcal{O}_U$ est, d'après (2.1.16), de p -courbure nulle. La flèche (2.1.15) (pour $E = \mathcal{O}$) est un isomorphisme, autrement dit il existe localement une base y de $\mathcal{O}_X$ comme $\mathcal{O}_X$ -Module telle que $\nabla y = 0$. Or

$$\nabla y = dy + y\omega,$$

donc $\omega = -dy/y = dx/x$, où $x = y^{-1}$.

COROLLAIRE 2.1.18. — On a une suite exacte de faisceaux abéliens sur X :

$$(2.1.19) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_{X^{(p)}}^* \xrightarrow{F_{X/S}} \mathcal{O}_X^* \xrightarrow{d \log} Z\Omega_{X/S}^1 \xrightarrow{W^* - C} \Omega_{X^{(p)}/S}^1,$$

où $d \log(x) = dx/x$. La flèche $W^* - C$ est surjective pour la topologie étale.

L'exactitude en $\mathcal{O}_X^*$ (resp. $Z\Omega_{X/S}^1$) découle de 2.1.9 (resp. 2.1.17). Pour la deuxième assertion, on note d'abord que, si a (resp. x) est une section locale de $\mathcal{O}_{X^{(p)}}$ (resp. $\mathcal{O}_X^*$), on a

$$(\star) \quad (W^* - C)(ad \log x) = (a^p - a)W^*d \log x.$$

[car $C(ad \log x) = ad \log x$ d'après 2.1.17, et le composé $X^{(p)} \xleftarrow{F_{X/S}} X \xleftarrow{W} X^{(p)}$ est le frobenius (absolu) de $X^{(p)}$]. Cela étant, on peut supposer, quitte à se localiser (pour Zariski), qu'on dispose de sections inversibles $x_1, \dots, x_r$ de $\mathcal{O}_X$ définissant un S -morphisme étale de X dans $S[T_1, \dots, T_r, T_1^{-1}, \dots, T_r^{-1}]$. Toute forme $\omega \in \Omega_{X^{(p)}/S}^1$ s'écrit alors

$$\omega = \sum_{i=1}^r b_i W^*(d \log x_i), \quad b_i \in \mathcal{O}_{X^{(p)}}.$$

Quitte à faire une extension étale sur X , on peut écrire $b_i = a_i^p - a_i$, avec $a_i \in \mathcal{O}_{X^{(p)}}$, et, si l'on pose $\eta = \sum_{i=1}^r a_i d \log x_i$, on a, compte tenu de $(\star)$, $(W^* - C)\eta = \omega$, ce qui achève la démonstration de 2.1.18.

Le lecteur trouvera dans les articles de Hoobler [31] et Ogus [59] diverses « formes tordues » de la suite exacte (2.1.19).

Signalons d'autre part que, pour tout i , la flèche canonique

$$(2.1.20) \quad W^* - C_{X/S} : Z\Omega_{X/S}^i \rightarrow \Omega_{X^{(p)}/S}^i$$

est surjective pour la topologie étale. La démonstration est analogue à celle donnée dans le cas $i=1$ (cf. [51], 1.3).

Supposons S *parfait* (i.e. F_S un isomorphisme), et, comme précédemment, X lisse sur S . Alors (2.1.4) est un isomorphisme, et l'inverse de (2.1.4) définit un homomorphisme $\mathcal{O}_X$ -linéaire, appelé encore *opération de Cartier* :

$$(2.1.21) \quad C_X : W_* Z\Omega_{X/S}^\bullet \rightarrow \Omega_{X/S}^\bullet,$$

donnant une suite exacte de $\mathcal{O}_X$ -Modules :

$$(2.1.22) \quad 0 \rightarrow W_* B\Omega_{X/S}^\bullet \rightarrow W_* Z\Omega_{X/S}^\bullet \xrightarrow{C_X} \Omega_{X/S}^\bullet \rightarrow 0,$$

et un carré commutatif (cf. [51], 1.5) :

$$(2.1.22) \quad \begin{array}{ccc} Z\Omega_{X/S}^\bullet & \xrightarrow{1-C_X} & \Omega_{X/S}^\bullet \\ C_X \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_{X/S}^\bullet & \xrightarrow{C_X^{-1}-1} & \Omega_{X/S}^\bullet / B\Omega_{X/S}^\bullet \end{array}$$

[où, dans la ligne supérieure (resp. inférieure), 1 désigne par abus l'injection (resp. la projection) canonique]. La suite (2.1.19) et la commutativité de (2.1.22) fournissent les suites exactes

$$(2.1.23) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_X^{*p} \rightarrow \mathcal{O}_X^* \xrightarrow{d\log} Z\Omega_{X/S}^1 \xrightarrow{1-C} \Omega_{X/S}^1,$$

$$(2.1.24) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_X^{*p} \rightarrow \mathcal{O}_X^* \xrightarrow{d\log} \Omega_{X/S}^1 \xrightarrow{1-C^{-1}} \Omega_{X/S}^1 / B\Omega_{X/S}^1,$$

où les flèches de droite sont surjectives pour la topologie étale.

2.2. Opération de Cartier itérée. — La théorie développée dans ce numéro et le suivant est inspirée de certains calculs de [12]. Pour les besoins de ce travail, nous aurions pu nous contenter de l'exposer dans le cadre « absolu » (i.e. sur une base parfaite). Nous avons préféré, toutefois, nous placer dans le cadre « relatif », en vue d'obtenir des résultats utilisables ultérieurement dans la théorie (future) du complexe de De Rham-Witt relatif.

Soit $X \rightarrow S$ un morphisme de $\mathbb{F}_p$ -schémas. Pour tout entier $n \geq 0$, on note $X^{(p^n/S)}$ (ou $X^{(p^n)}$) le produit fibré $X \times_S (S, F_S^n)$, et $F_{X/S}^n : X \rightarrow X^{(p^n)}$ le S -morphisme déduit de F_X^n par la

factorisation canonique (cf. (SGA 5 XIV, § 1, n° 4). Par l'isomorphisme canonique $X^{(p^n)} = (X^{(p^{n-1})})^{(p)}$, $F_{X/S}^n$ s'identifie à $(F_{X/S}^{n-1})^{(p)} \circ F_{X/S}$, comme le montre le diagramme commutatif à carrés cartésiens

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X & & \\
 & \swarrow F & \downarrow F_{X/S} & & \\
 & X & \leftarrow X^{(p)} & & \\
 & \swarrow F^{n-1} & \downarrow F_{X/S}^{n-1} & \swarrow (F_{X/S}^{n-1})^{(p)} & \\
 & X & \leftarrow X^{(p^{n-1})} & \leftarrow X^{(p^n)} & \\
 & \downarrow F^{n-1} & \downarrow F & \downarrow F & \\
 S & \leftarrow S & \leftarrow S & \leftarrow S &
 \end{array}$$

On a donc (à une identification canonique près) :

$$(2.2.1) \quad F_{X/S}^n = F_{X^{(p^{n-1})}/S} \circ \dots \circ F_{X/S}.$$

On suppose à partir de maintenant X lisse sur S . Soit $i \in \mathbb{Z}$. Rappelons qu'on a alors l'isomorphisme de Cartier inverse

$$C_{X/S}^{-1}: \Omega_{X^{(p^n)}/S}^i \xrightarrow{\sim} H^i(\Omega_{X/S}^\bullet) = Z^i \Omega_{X/S}^\bullet / B^i \Omega_{X/S}^\bullet.$$

On définit, pour tout entier $n \geq 0$, des sous-faisceaux abéliens de $\Omega_{X/S}^i$:

$$(2.2.2) \quad B_n \Omega_{X/S}^i \subset Z_n \Omega_{X/S}^i \subset \Omega_{X/S}^i,$$

par les formules (cf. [12], II, § 5) :

$$\left. \begin{aligned}
 B_0 \Omega_{X/S}^i &= 0, & Z_0 \Omega_{X/S}^i &= \Omega_{X/S}^i, \\
 B_1 \Omega_{X/S}^i &= B \Omega_{X/S}^i, & Z_1 \Omega_{X/S}^i &= Z \Omega_{X/S}^i, \\
 B_n \Omega_{X^{(p^n)}/S}^i &\xrightarrow[\simeq]{C_{X/S}^{-1}} B_{n+1} \Omega_{X/S}^i / B_1 \Omega_{X/S}^i \\
 Z_n \Omega_{X^{(p^n)}/S}^i &\xrightarrow[\simeq]{C_{X/S}^{-1}} Z_{n+1} \Omega_{X/S}^i / B_1 \Omega_{X/S}^i
 \end{aligned} \right\} \quad (n \geq 1).$$

On a donc une chaîne d'inclusions

$$\begin{aligned}
 (2.2.3) \quad 0 &\subset B_1 \Omega_{X/S}^i \subset \dots \subset B_n \Omega_{X/S}^i \subset B_{n+1} \Omega_{X/S}^i \subset \dots \\
 &\subset Z_{n+1} \Omega_{X/S}^i \subset Z_n \Omega_{X/S}^i \subset \dots \subset Z_1 \Omega_{X/S}^i \subset \Omega_{X/S}^i.
 \end{aligned}$$

On notera que $Z_n \Omega_{X/S}^i$ et $B_n \Omega_{X/S}^i$ sont, de façon naturelle, des sous- $\mathcal{O}_{X^{(p^n)}}$ -Modules de $F_{X/S}^n \Omega_{X/S}^i$, et que, par définition, $C_{X/S}^{-1}$ induit un isomorphisme de $\mathcal{O}_{X^{(p^{n+1})}}$ -Modules :

$$(2.2.4) \quad C_{X/S}^{-1} : Z_n \Omega_{X^{(p^n)}/S}^i / B_n \Omega_{X^{(p^n)}/S}^i \xrightarrow{\sim} Z_{n+1} \Omega_{X/S}^i / B_{n+1} \Omega_{X/S}^i.$$

Par itération, (2.2.4) définit, pour tout $n \geq 0$, un isomorphisme de $\mathcal{O}_{X^{(p^n)}}$ -Modules :

$$(2.2.5) \quad C_{X/S}^{-n} : \Omega_{X^{(p^n)}/S}^i \xrightarrow{\sim} Z_n \Omega_{X/S}^i / B_n \Omega_{X/S}^i,$$

et une suite exacte de $\mathcal{O}_{X^{(p^n)}}$ -Modules :

$$(2.2.6) \quad 0 \rightarrow \Omega_{X^{(p^n)}/S}^i \xrightarrow{C_{X/S}^{-n}} \Omega_{X/S}^i / B_n \Omega_{X/S}^i \rightarrow \Omega_{X/S}^i / Z_n \Omega_{X/S}^i \rightarrow 0.$$

Appliquant $C_{X/S}^{-n}$ à la suite exacte

$$0 \rightarrow Z_1 \Omega_{X^{(p^n)}/S}^{i-1} \rightarrow \Omega_{X^{(p^n)}/S}^{i-1} \xrightarrow{d} B_1 \Omega_{X^{(p^n)}/S}^i \rightarrow 0,$$

on obtient d'autre part une suite exacte

$$(2.2.6.1) \quad 0 \rightarrow Z_{n+1}^{i-1} / B_n^{i-1} \rightarrow Z_n^{i-1} / B_n^{i-1} \xrightarrow{d_n} B_{n+1}^i / B_n^i \rightarrow 0,$$

et un isomorphisme

$$(2.2.6.2) \quad Z_n^{i-1} / Z_{n+1}^{i-1} \xrightarrow{d_n} B_{n+1}^i / B_n^i,$$

où l'on a abrégé $Z_m \Omega_{X/S}^j$ (resp. $B_m \Omega_{X/S}^j$) en Z_m^j (resp. B_m^j). En d'autres termes, si $C^{-n} \Omega_{X^{(p^n)}/S}^* = Z_n \Omega_{X/S}^* / B_n \Omega_{X/S}^*$ désigne le complexe déduit du complexe de De Rham de $X^{(p^n)}/S$ par application de l'isomorphisme $C_{X/S}^{-n}$, on a un isomorphisme canonique

$$(2.2.6.3) \quad Z_{n+1}^i / B_{n+1}^i = H^i(C^{-n} \Omega_{X^{(p^n)}/S}^*).$$

Il découle par ailleurs de (2.1.8) que, si $f : X' \rightarrow X$ est étale, l'isomorphisme $f^* \Omega_{X/S}^i \xrightarrow{\sim} \Omega_{X'/S}^i$ induit des isomorphismes de $\mathcal{O}_{X^{(p^n)}}$ -Modules :

$$(2.2.7) \quad f^{(p^n)*} Z_n \Omega_{X/S}^i \xrightarrow{\sim} Z_n \Omega_{X'/S}^i, \quad f^{(p^n)*} B_n \Omega_{X/S}^i \rightarrow B_n \Omega_{X'/S}^i,$$

avec lesquels (2.2.4), (2.2.5), (2.2.6), (2.2.6.1), (2.2.6.2) et (2.2.6.3) sont compatibles en un sens évident.

PROPOSITION 2.2.8. — (a) $Z_n \Omega_{X/S}^i$ et $B_n \Omega_{X/S}^i$ sont des $\mathcal{O}_{X^{(p^n)}}$ -Modules localement libres de type fini, de formation compatible à tout changement de base $S' \rightarrow S$.

(b) $B_n \Omega_{X/S}^i$ est le sous- $\mathcal{O}_S$ -Module de $\Omega_{X/S}^i$ engendré localement par les sections de la forme $x_1^{p_1^{r_1}-1} \dots x_i^{p_i^{r_i}-1} dx_1 \dots dx_i$, où $x_1, \dots, x_i \in \mathcal{O}_X$, avec $0 \leq r \leq n-1$.

(b') $B_n \Omega_{X/S}^i$ est le sous- $\mathcal{O}_S$ -Module de $\Omega_{X/S}^i$ engendré localement par les sections de la forme $x_1^{p_1} d \log x_1 \dots d \log x_i$, où $x_1, \dots, x_i \in \mathcal{O}_X^*$, avec $0 \leq r \leq n-1$.

(c) $Z_n \Omega_{X/S}^i$ est le sous- $\mathcal{O}_S$ -Module de $\Omega_{X/S}^i$ engendré localement par $B_n \Omega_{X/S}^i$ et les sections de la forme $ax_1^{p_1-1} \dots x_i^{p_i-1} dx_1 \dots dx_i$, où $x_1, \dots, x_i$ (resp. a) $\in \mathcal{O}_X$ (resp. $\mathcal{O}_{X^{(p_1)}}$).

(c') $Z_n \Omega_{X/S}^i$ est le sous- $\mathcal{O}_S$ -Module de $\Omega_{X/S}^i$ engendré localement par $B_n \Omega_{X/S}^i$ et les sections de la forme $ad \log x_1 \dots d \log x_i$, où $x_1, \dots, x_i$ (resp. a) $\in \mathcal{O}_X^*$ (resp. $\mathcal{O}_{X^{(p_1)}}^*$).

Prouvons d'abord l'assertion de (a) relative aux changements de base. Elle est triviale pour $n=0$, et, pour $n=1$, elle résulte de l'isomorphisme de Cartier 2.1.9. On en déduit facilement l'assertion dans le cas général par récurrence sur n . Pour montrer que $Z_n \Omega_{X/S}^i$ et $B_n \Omega_{X/S}^i$ sont des $\mathcal{O}_{X^{(p_1)}}$ -Modules localement libres de type fini, on peut, compte tenu de (2.2.7), supposer que $X = S[T_1, \dots, T_m]$, puis, par changement de base, que $X = \text{Spec}(\mathbb{F}_p[T_1, \dots, T_m])$. Il résulte aussitôt de la définition que $B_n \Omega_X^i$ et $Z_n \Omega_X^i$ sont des $\mathcal{O}_{X^{(p_1)}}$ -Modules cohérents. Soit $\bar{X}$ le schéma déduit de X par extension des scalaires à une clôture algébrique k de $\mathbb{F}_p$. Les images inverses de $B_n \Omega_X^i$ et $Z_n \Omega_X^i$ sur $\bar{X}$ s'identifient à $B_n \Omega_{\bar{X}}^i$ et $Z_n \Omega_{\bar{X}}^i$, et sont localement libres sur un ouvert non vide de $\bar{X}$. Par translation par des k -points de $\bar{X}$, on en déduit que $B_n \Omega_{\bar{X}}^i$ et $Z_n \Omega_{\bar{X}}^i$ sont localement libres partout. Donc $B_n \Omega_X^i$ et $Z_n \Omega_X^i$ sont localement libres de type fini, ce qui achève de prouver (a). Notons $B'_n \Omega_{X/S}^i$ le sous- $\mathcal{O}_S$ -module de $\Omega_{X/S}^i$ engendré localement par les sections de la forme $x_1^{p_1-1} \dots x_i^{p_i-1} dx_1 \dots dx_i$, où $x_1, \dots, x_i \in \mathcal{O}_X$, avec $0 \leq r \leq n-1$. On a clairement $B_n = B'_n$ pour $n \leq 1$. Comme, d'après (a) :

$$B_n \Omega_{X^{(p_1)}/S}^i = B_n \Omega_{X/S}^i \otimes_{\mathcal{O}_S} (\mathcal{O}_S, F),$$

la formule

$$C^{-1}(x_1^{p_1-1} \dots x_i^{p_i-1} dx_1 \dots dx_i) = x_1^{p_1+1-1} \dots x_i^{p_i+1-1} dx_1 \dots dx_i \bmod B_1$$

montre, par récurrence sur n , que $B_n = B'_n$ pour tout n , d'où (b). L'assertion (b') se démontre de même, par récurrence sur n , à l'aide de la formule

$$C^{-1}(x_1^{p_1} d \log x_1 \dots d \log x_i) = x_1^{p_1+1} d \log x_1 \dots d \log x_i \bmod B_1,$$

pour $x_1, \dots, x_i \in \mathcal{O}_X^*$. La vérification des assertions (c) et (c') est analogue, nous la laissons en exercice au lecteur.

PROPOSITION 2.2.9. — Supposons S parfait. Pour tout $n \geq 0$, la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X^* / \mathcal{O}_X^{*p} \xrightarrow{d \log} \Omega_X^1 / B_n \Omega_X^1 \xrightarrow{1-C^{-1}} \Omega_X^1 / B_{n+1} \Omega_X^1$$

est exacte, et la flèche de droite est surjective pour la topologie étale.

Soit $x \in \Omega_X^1$ de classe $\bar{x}$ dans $\Omega_X^1 / B_n \Omega_X^1$. La relation $\bar{x} = C^{-1} \bar{x}$ dans $B_{n+1} \Omega_X^1 / B_1 \Omega_X^1$ entraîne $x \in \bigcap_r Z_r \Omega_X^1$ et $Cx = x \bmod B_n \Omega_X^1$. Donc $C^{n+1}x = C^n x$, et d'après (2.1.23), $C^n x \in d \log(\mathcal{O}_X^*)$. Mais $x = Cx \bmod B_n \Omega_X^1$ entraîne $x = Cx = C^2x = \dots = C^n x \bmod B_n \Omega_X^1$, donc $\bar{x}$ est dans l'image de $d \log$, d'où l'exactitude au centre. Si $a \in \mathcal{O}_X^*$ est tel que $d \log a \in B_n \Omega_X^1$, on en déduit $d \log a = C(d \log a) = \dots = C^n d \log a = 0$, donc (2.1.23) $a \in \mathcal{O}_X^{*p}$.

d'où l'exactitude à gauche. La surjectivité de $1 - C^{-1}$ pour la topologie étale pour $n=0$ (2.1.24) l'entraîne pour tout $n \geq 0$, ce qui achève la démonstration.

2.3. *Relèvements de Frobenius.* — La donnée de certains relèvements de X/S permet d'obtenir des caractérisations des Z_n et B_n , qui nous seront utiles dans l'étude locale du complexe de De Rham-Witt.

2.3.1. Soient S un $\mathbb{F}_p$ -schéma, X un S -schéma lisse. On suppose donnés : (a) un schéma formel T , p -adiquement séparé et complet, plat sur $\mathbb{Z}_p$, tel que $\mathcal{O}_T/p\mathcal{O}_T = \mathcal{O}_S$, muni d'un endomorphisme F_T relevant le frobenius F_S ; (b) un schéma formel Y lisse sur T relevant X/S ; (c) un endomorphisme F_Y de Y relevant F_X et compatible à F_T .

De telles données existent par exemple si S est parfait (i.e. F_S un automorphisme), et X affine : on peut prendre pour T le schéma formel des vecteurs de Witt $W(S) = \varinjlim W_n(S)$ (1.5), pour F_T l'endomorphisme (= automorphisme) de Frobenius de $W(S)$, et, comme X est affine, il n'y a pas d'obstruction à relever d'abord X/S en Y/T formel plat, puis $F_{X/S}$ en un T -morphisme $Y \rightarrow Y \times_T (T, F_T)$. Plus généralement, des données 2.3.1 existent dès que X et S sont affines, avec S lisse sur un schéma parfait.

On notera $Y^{(F/T)}$ (ou $Y^{(F)}$) le schéma formel déduit de Y par le changement de base F_T , et $F_{Y/T} : Y \rightarrow Y^{(F)}$ le T -morphisme déduit de F_Y par la factorisation canonique. On notera d'autre part $\Omega_{Y/T}^1$ le module des différentielles continues de Y/T , et $\Omega_{Y/T}^\bullet = (\Lambda \Omega_{Y/T}^1, d)$ le complexe de De Rham correspondant. Si l'on pose $T_n = T \otimes \mathbb{Z}/p^{n+1}$, $Y_n = Y \otimes \mathbb{Z}/p^{n+1} = Y \times_T T_n$, on a donc par définition

$$\Omega_{Y/T}^1 = \varprojlim \Omega_{Y_n/T_n}^1,$$

et $\Omega_{Y/T}^1$ est un $\mathcal{O}_Y$ -Module localement libre de type fini.

PROPOSITION 2.3.2. — *Sous les hypothèses de 2.3.1 : (i) $F_{Y/T}$ est fini, localement libre.*

(ii) *Pour tout entier $i \geq 0$, la flèche canonique $F_{Y/T}^* \Omega_{Y^{(F)/T}}^i \rightarrow \Omega_{Y/T}^i$ [resp. $\Omega_{Y^{(F)/T}}^i \rightarrow (F_{Y/T})_* \Omega_{Y/T}^i$] est d'image contenue dans $p^i \Omega_{Y/T}^i$ [resp. $p^i (F_{Y/T})_* \Omega_{Y/T}^i$].*

Comme $F_{X/S}$ est fini, localement libre, et que Y_n (resp. $Y_n^{(F)}$) est une déformation lisse de X/S (resp. $X^{(p)}/S$), le critère de platitude par fibres (EGA IV 11.3.10) entraîne que $F_{Y/T}$ est fini, localement libre, d'où (i). Pour (ii), on peut se borner à $i=1$. Par réduction modulo p , la flèche $F_{Y/T}^* \Omega_{Y^{(F)/T}}^1 \rightarrow \Omega_{Y/T}^1$ donne la flèche canonique $F_{X/S}^* \Omega_{X^{(p)}/S}^1 \rightarrow \Omega_{X/S}^1$, qui est nulle (comme le montre un calcul en coordonnées locales), d'où (ii).

En vertu de 2.3.2 (ii), il existe un unique homomorphisme d'algèbres graduées

$$(2.3.3) \quad F_{Y/T} : \Omega_{Y^{(F)/T}}^\bullet \rightarrow \Omega_{Y/T}^\bullet$$

(noté simplement F s'il n'y a pas de risque de confusion), vérifiant :

$$(2.3.4) \quad dF = pFd,$$

tel que l'homomorphisme canonique d'algèbres différentielles graduées

$$(2.3.5) \quad F_{Y/T} : \Omega_{Y^{(F)/T}}^\bullet \rightarrow \Omega_{Y/T}^\bullet$$

défini par $F_{Y/T} : Y \rightarrow Y^{(F)}$ s'écrive :

$$(2.3.6) \quad F_{Y/T} = p^* F$$

(i. e. $F_{Y/T} \omega = p^i F \omega$ pour ω homogène de degré i). Nous noterons

$$(2.3.7) \quad \overline{F}_{X/S} \text{ (ou } \overline{F}) : \Omega_{X^{(p)}/S}^\bullet \rightarrow \Omega_{X/S}^\bullet,$$

l'homomorphisme déduit de (2.3.3.) par réduction mod p . L'observation suivante est due à Mazur [49], p. 62 :

PROPOSITION 2.3.8. — *On a, pour tout i , $\overline{F}(\Omega_{X^{(p)}/S}^i) \subset Z\Omega_{X/S}^i$, et le composé avec la projection canonique*

$$\Omega_{X^{(p)}/S}^i \xrightarrow{\overline{F}} Z\Omega_{X/S}^i \rightarrow H^i(\Omega_{X/S}^\bullet)$$

coïncide avec $C_{X/S}^{-1}(2.1.6)$.

L'inclusion découle de (2.3.4). D'autre part, le composé avec la projection canonique

$$c : \Omega_{X^{(p)}/S}^\bullet \xrightarrow{\overline{F}} Z\Omega_{X/S}^\bullet \rightarrow H^*(\Omega_{X/S}^\bullet)$$

est un homomorphisme d'algèbres graduées, égal à $F_{X/S}$ en degré 0. De plus, si y est une section de $\mathcal{O}_Y$, d'image x dans $\mathcal{O}_X$, on a

$$\overline{F}(W^* dx) = F(\text{image de } dy \text{ dans } \Omega_{Y^{(F)/T}}^1) \bmod p = (p^{-1} d(F_Y y)) \bmod p.$$

Or $F_Y(y) = y^p + pz$, pour $z \in \mathcal{O}_Y$, donc

$$p^{-1} d(F_Y y) = y^{p-1} dy + dz,$$

et par suite

$$c(W^* dx) = \text{image de } x^{p-1} dx \text{ dans } H^1(\Omega_{X/S}^\bullet).$$

Donc $c = C_{X/S}^{-1}$, par définition de $C_{X/S}^{-1}$.

Pour tout entier $n \geq 0$, notons $Y^{(F^n)}$ (ou simplement $Y^{(n)}$) le schéma formel déduit de Y/T par le changement de base F_T^n , et $F_{Y/T}^n : Y \rightarrow Y^{(n)}$ le T -morphisme déduit de F_Y^n par la factorisation canonique. Comme en (2.2.1), on a, à une identification canonique près

$$(2.3.9) \quad F_{Y/T}^n = F_{Y^{(n-1)}/T} \circ \dots \circ F_{Y/T}.$$

Nous noterons

$$(2.3.10) \quad F_{Y/T}^n \text{ (ou } F^n) : \Omega_{Y^{(n)}/T}^\bullet \rightarrow \Omega_{Y/T}^\bullet$$

l'itéré n -ième de (2.3.3), et

$$(2.3.11) \quad \overline{F}_{X/S}^n \text{ (ou } \overline{F}^n) : \Omega_{X^{(p^n)}/S}^\bullet \rightarrow \Omega_{X/S}^\bullet$$

l'homomorphisme déduit de (2.3.10) par réduction mod p . Compte tenu des formules (2.2.2) à (2.2.5), 2.3.8 entraîne le :

COROLLAIRE 2.3.12. — On a $\overline{F}^n(\Omega_{X^{(p^n)}/S}^\bullet) \subset Z_n \Omega_{X/S}^\bullet$, et l'homomorphisme composé avec la projection canonique

$$\Omega_{X^{(p^n)}/S}^\bullet \xrightarrow{\overline{F}^n} Z_n \Omega_{X/S}^\bullet \rightarrow Z_n \Omega_{X/S}^\bullet / B_n \Omega_{X/S}^\bullet$$

coïncide avec $C_{X/S}^{-n}$ (2.2.5). En particulier, on a

$$\begin{aligned} \overline{F}^n(\Omega_{X^{(p^n)}/S}^\bullet) + B_n \Omega_{X/S}^\bullet &= Z_n \Omega_{X/S}^\bullet, \\ \overline{F}^n(B_1 \Omega_{X^{(p^n)}/S}^\bullet) + B_n \Omega_{X/S}^\bullet &= B_{n+1} \Omega_{X/S}^\bullet. \end{aligned}$$

PROPOSITION 2.3.13. — Soient n et i des entiers ≥ 0 . Notons $d^{-1}(p^n \Omega_{Y/T}^{i+1})$ le sous-faisceau de $\Omega_{Y/T}^i$ formé des sections x telles que dx soit divisible par p^n . On a

$$d^{-1}(p^n \Omega_{Y/T}^{i+1}) = \sum_{0 \leq k \leq n} p^k F^{n-k}(\Omega_{Y^{(p^{n-k})}/T}^i) + \sum_{0 \leq k \leq n-1} F^k(d \Omega_{Y^{(p^k)}/T}^{i-1}).$$

Nous ferons la démonstration par récurrence sur n . Pour $n=0$, la formule à prouver est triviale. Supposons-la démontrée jusqu'à $n-1$ ($n \geq 1$), et soit $x \in \Omega_{Y/T}^i$ tel que $dx = p^n y$, $y \in \Omega_{Y/T}^{i+1}$. Par l'hypothèse de récurrence, on peut, quitte à se localiser, écrire :

$$(1) \quad x = \sum_{k=0}^{n-1} p^k F^{n-1-k} x_k + \sum_{k=0}^{n-2} F^k dy_k,$$

avec $x_k \in \Omega_{Y^{(p^{n-1-k})}/T}^i$, $y_k \in \Omega_{Y^{(p^k)}/T}^{i-1}$. On en déduit, d'après (2.3.4) :

$$dx = p^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} F^{n-1-k} dx_k \right),$$

d'où (puisque la multiplication par p dans $\Omega_{Y/T}^\bullet$ est injective) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} F^{n-1-k} dx_k = py.$$

Par réduction mod p , on obtient donc

$$(2) \quad \sum_{k=0}^{n-1} \overline{F}^{n-1-k} d\overline{x}_k = 0,$$

où $\bar{x}_k$ désigne l'image de x_k dans $\Omega_{X^{(p^{n-1}-k)/S}}^i$. Il s'ensuit que $\bar{F}^{n-1} d\bar{x}_0 \in B_{n-1} \Omega_{X/S}^i$, donc (2.3.12) $C^{-(n-1)} d\bar{x}_0 = 0$, d'où $d\bar{x}_0 = 0$. Reportant dans (2) et recommençant, on trouve

$$d\bar{x}_0 = \dots = d\bar{x}_{n-1} = 0.$$

Compte tenu de 2.3.12, cela entraîne que, quitte à se localiser, on peut écrire :

$$x_k = F u_k + d v_k + p w_k, \quad 0 \leq k \leq n-1,$$

avec $u_k \in \Omega_{Y^{(n-k)/T}}^i$, $v_k \in \Omega_{Y^{(n-1-k)/T}}^{i-1}$, $w_k \in \Omega_{Y^{(n-1-k)/T}}^i$. Reportant dans (1), on obtient :

$$\begin{aligned} x = F^n u_0 + p F^{n-1} (u_1 + w_0) + \dots + p^{n-1} F (u_{n-1} + w_{n-2}) + p^n w_{n-1} \\ + d(y_0 + p^{n-1} v_{n-1}) + F d(y_1 + p^{n-2} v_{n-2}) + \dots + F^{n-2} d(y_{n-2} + p v_1) + F^{n-1} d v_0, \end{aligned}$$

ce qui démontre la proposition.

COROLLAIRE 2.3.14 (cf. [12], II, § 5, 2.4). — Soient n et i des entiers ≥ 0 et x une section de $\Omega_{X/S}^i$.

(a) Pour que x appartienne à $Z_n \Omega_{X/S}^i$, il faut et il suffit qu'il existe localement une section y de $\Omega_{Y/T}^i$ relevant x et telle que $dy \in p^n \Omega_{Y/T}^{i+1}$.

(b) Pour que x appartienne à $B_n \Omega_{X/S}^i$, il faut et il suffit qu'il existe localement une section y de $\Omega_{Y/T}^{i-1}$ telle que $dy \in p^{n-1} \Omega_{Y/T}^i$ et $(dy)/p^{n-1}$ relève x .

Prouvons d'abord (b). Si $x \in B_n \Omega_{X/S}^i$, on peut, d'après 2.2.8, supposer qu'il existe $x_1, \dots, x_i \in \mathcal{O}_X$ tels que $x = (x_1^{p^{n-1}} dx_1) \dots (x_i^{p^{n-1}} dx_i)$, avec $0 \leq r \leq n-1$. On peut supposer de plus que x_i se relève en $y_i \in \mathcal{O}_Y$. Posons

$$y' = y_1^{p^r} y_2^{p^{r-1}} \dots y_i^{p^{r-1}} dy_1 \dots dy_i \in \Omega_{Y/T}^{i-1}.$$

On a $dy' = p^r z$, où $z \in \Omega_{Y/T}^i$ relève x , et si $y = p^{n-1-r} y'$, on a $dy = p^{n-1} z$, ce qui prouve le « il faut ». Inversement, supposons qu'il existe $y \in \Omega_{Y/T}^{i-1}$ tel que $dy = p^{n-1} z$, où $z \in \Omega_{Y/T}^i$ relève x . Quitte à localiser, on peut écrire, d'après 2.3.13 :

$$y = F^{n-1} u_1 + p F^{n-2} u_2 + \dots + p^{n-1} u_n + d v_1 + \dots + F^{n-2} d v_{n-1},$$

avec $u_j \in \Omega_{Y^{(n-j)/T}}^{i-1}$, $v_j \in \Omega_{Y^{(n-1-j)/T}}^{i-2}$. D'où, grâce à (2.3.4) :

$$dy = p^{n-1} (F^{n-1} du_1 + \dots + du_n),$$

et, comme $\Omega_{Y/T}^i$ est sans p -torsion :

$$z = F^{n-1} du_1 + \dots + du_n.$$

D'après 2.3.12, il en résulte que $x \in B_n \Omega_{X/S}^i$, ce qui prouve (b). Montrons (a). Si $x \in Z_n \Omega_{X/S}^i$, on peut supposer, d'après (b) et 2.2.8, qu'il existe $x_1, \dots, x_i \in \mathcal{O}_X$ et $a \in \mathcal{O}_{X^{(p^n)}}$ tels que $x = a x_1^{p^{n-1}} \dots x_i^{p^{n-1}} dx_1 \dots dx_i$. On peut supposer de plus que x_i se relève en $y_i \in \mathcal{O}_Y$, et a en $b \in \mathcal{O}_{Y^{(n)}}$, de sorte que x se relève en

$$y = (F^n b) y_1^{p^{n-1}} \dots y_i^{p^{n-1}} dy_1 \dots dy_i \in \Omega_{Y/T}^i.$$

D'après (2.3.4), on a

$$dy = p^n (F^n db) y_1^{p^n-1} \dots y_i^{p^n-1} dy_1 \dots dy_i,$$

ce qui prouve le « il faut ». Inversement, s'il existe $y \in \Omega_{Y/T}^i$ relevant x et tel que $dy \in p^n \Omega_{Y/T}^{i+1}$, on a, d'après 2.3.13 :

$$x \in \overline{F}^n \Omega_{X^{(p^n)/S}}^i + \sum_{k=0}^{n-1} \overline{F}^k (d \Omega_{X^{(p^k)/S}}^{i-1}),$$

avec la notation (2.3.11). D'après 2.3.12, cela entraîne que $x \in Z_n \Omega_{X/S}^i$, ce qui achève la démonstration de 2.3.14.

Remarque 2.3.15. — Si $x \in Z_n^{i-1}$ [avec les notations de (2.2.6.1)] est relevé en $y \in \Omega_{Y/T}^{i-1}$ tel que dy soit divisible par p^n , la réduction mod p de $(dy)/p^n$ est, d'après 2.3.14, un élément de B_{n+1}^i , dont l'image dans B_{n+1}^i/B_n^i ne dépend pas du choix de y , comme on le vérifie aussitôt. On définit ainsi une application de Z_n^{i-1} dans B_{n+1}^i/B_n^i . Il découle immédiatement de 2.3.14 que celle-ci est surjective, et a pour noyau Z_{n+1}^{i-1} , autrement dit qu'elle induit un isomorphisme

$$Z_n^{i-1}/Z_{n+1}^{i-1} \xrightarrow{\sim} B_{n+1}^i/B_n^i.$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que cet isomorphisme n'est autre que (2.2.6.2).

COROLLAIRE 2.3.16. — (a) *Quels que soient les entiers i , et $m, n \geq 0$, on a*

$$F^m(\Omega_{Y^{(m)/T}}^i) \cap p^n \Omega_{Y/T}^i = p^n F^m(\Omega_{Y^{(m)/T}}^i).$$

En particulier, $\Omega_{Y/T}^i/F^m \Omega_{Y^{(m)/T}}^i$ est sans p -torsion.

(b) *Quels que soient les entiers i , et $m, n, h \geq 0$, on a*

$$(F^{m+h} \Omega_{Y^{(m+h)/T}}^i) \cap (p^n \Omega_{Y/T}^i + (\Omega_{Y/T}^i \cap p^{-m} d \Omega_{Y/T}^{i-1})) \subset p^r F^{m+h} \Omega_{Y^{(m+h)/T}}^i,$$

où $r = \inf(n, h)$.

Pour (a), raisonnons par récurrence sur n , pour m fixé. Soient $x \in \Omega_{Y^{(m)/T}}^i$, $y \in \Omega_{Y/T}^i$ tels que $F^m x = p^n y$. Par l'hypothèse de récurrence, on en déduit $F^m x = p^{n-1} F^m z$, avec $z \in \Omega_{Y^{(m)/T}}^i$, d'où $F^m z = py$, et, d'après 2.3.12, $z = pu$, avec $u \in \Omega_{Y^{(m)/T}}^i$, donc $F^m x = p^n F^m u$, ce qui prouve (a). Pour (b), supposons d'abord $n \geq h$, donc $r = h$, et raisonnons par récurrence sur h pour m et n fixés. L'assertion est triviale pour $h=0$. Soient $x \in \Omega_{Y^{(m+h)/T}}^i$, $y \in \Omega_{Y/T}^i$, $z \in \Omega_{Y/T}^{i-1}$ tels que

$$F^{m+h} x = p^n y + p^{-m} dz \quad (h \geq 1).$$

Par l'hypothèse de récurrence, $F^{m+h} x \in p^{h-1} \Omega_{Y/T}^i$, donc, en vertu de (a), $F^{m+h} x = p^{h-1} F^{m+h} u$, avec $u \in \Omega_{Y^{(m+h)/T}}^i$. On en déduit

$$F^{m+h} u - p^{n-(h-1)} y = p^{-(m+h-1)} dz,$$

ce qui entraîne, d'après 2.3.14 (b), que

$$\overline{F}^{m+h} \overline{u} \in B_{m+h} \Omega_{X/S}^i$$

(où $\overline{u}$ est la réduction de $u \bmod p$). D'après 2.3.12, on a donc $\overline{u}=0$, donc $u=pv$, avec $v \in \Omega_{Y^{(m+h)}/T}^i$, et $F^{m+h}x = p^h F^{m+h}v$, ce qui prouve (b) dans le cas envisagé. Supposons maintenant $h \geq n$, donc $r=n$, et raisonnons par récurrence sur n , pour m et h fixés. L'assertion est triviale pour $n=0$. Soient $x \in \Omega_{Y^{(m+h)}/T}^i$, $y \in \Omega_{Y/T}^i$, $z \in \Omega_{Y/T}^{i-1}$ tels que

$$F^{m+h}x = p^n y + p^{-m} dz \quad (n \geq 1).$$

Par l'hypothèse de récurrence, on a $F^{m+h}x = p^{n-1} F^{m+h}u$, avec $u \in \Omega_{Y^{(m+h)}/T}^i$. On en déduit

$$F^{m+h}u - py = p^{-(m+n-1)} dz,$$

d'où, d'après 2.3.14 (b) :

$$\overline{F}^{m+h} \overline{u} \in B_{m+n} \Omega_{X/S}^i$$

(où $\overline{u}=u \bmod p$). Comme $h \geq n$, on a $B_{m+n} \Omega_{X/S}^i \subset B_{m+h} \Omega_{X/S}^i$, et l'on conclut comme précédemment que $u=pv$, avec $v \in \Omega_{Y^{(m+h)}/T}^i$, ce qui achève la démonstration.

Variante 2.3.17. — A la place des hypothèses 2.3.1, faisons les suivantes. Supposons donnés : (a) un $\mathbb{Z}_p$ -schéma plat T relevant S , muni d'un endomorphisme F_T relevant le frotienius F_S ; (b) un schéma Y lisse sur T relevant X/S ; (c) un endomorphisme F_Y de Y relevant F_X et compatible à F_T .

Notons $Y^{(F/T)}$ (ou $Y^{(F)}$) le schéma déduit de Y par le changement de base F_T , et $F_{Y/T} : Y \rightarrow Y^{(F)}$ le T -morphisme déduit de F_Y par la factorisation canonique. Alors la flèche canonique $F_{Y/T}^* \Omega_{Y^{(F)}/T}^i \rightarrow \Omega_{Y/T}^i$ (resp. $\Omega_{Y^{(F)}/T}^i \rightarrow (F_{Y/T})_* \Omega_{Y/T}^i$) a son image contenue dans $p^i \Omega_{Y/T}^i$ [resp. $p^i (F_{Y/T})_* \Omega_{Y/T}^i$]. Si l'on note $F_{Y/T}$ (ou F) : $F_{Y/T}^{-1} \Omega_{Y^{(F)}/T}^i \rightarrow \Omega_{Y/T}^i$ l'homomorphisme d'algèbres graduées défini à partir de l'homomorphisme canonique par division par p^i en degré i , et $\overline{F}$ sa réduction mod p , les conclusions de 2.3.8, et 2.3.12 à 2.3.16 sont encore valables, nous laissons au lecteur les détails de la vérification.

2.4. Différentielles logarithmiques.

2.4.1. Soit $X \rightarrow S$ un morphisme lisse de $\mathbb{F}_p$ -schémas. Pour chaque entier i , notons, avec Milne [51], $v(i)$ le faisceau abélien sur X défini par la suite exacte

$$(2.4.1.1) \quad 0 \rightarrow v(i) \rightarrow Z \Omega_{X/S}^i \xrightarrow{W^* - C_{X/S}} \Omega_{X^{(p)}/S}^i,$$

avec les notations de 2.1 ($W^* : \Omega_{X/S}^i \rightarrow \Omega_{X^{(p)}/S}^i$ désignant par abus la flèche d'adjonction $\Omega_{X/S}^i \rightarrow W_* \Omega_{X^{(p)}/S}^i$). Le faisceau $v(i)$ est un faisceau de $\mathbb{F}_p$ -vectoriels sur le site zariskien de X . On le considérera parfois comme faisceau sur X pour la topologie étale, la flèche $W^* - C_{X/S}$ étant compatible à la localisation étale.

Pour $i=0$, $Z \Omega_{X/S}^i$ s'identifie à $\mathcal{O}_{X^{(p)}}$ par $F_{X/S}$ (2.1.9) et la dernière flèche de (2.4.1.1) à l'endomorphisme $F_{X^{(p)}} - 1$ de $\mathcal{O}_{X^{(p)}}$, donc

$$(2.4.1.2) \quad v(0) = \text{le faisceau constant } \mathbb{F}_p \text{ sur } X.$$

Pour $i=1$, on a, d'après 2.1.18 :

$$(2.4.1.3) \quad v(1) = d \log(\mathcal{O}_X^*).$$

La généralisation suivante est due à Bloch [13].

THÉORÈME 2.4.2. — *Sous les hypothèses de 2.4.1, pour tout $i \geq 1$, $v(i)$, considéré comme faisceau sur X pour la topologie étale, est le sous-faisceau abélien de $\Omega_{X/S}^i$ engendré localement (pour la topologie étale) par les différentielles logarithmiques, i.e. les sections de la forme $d \log x_1 \dots d \log x_i$, pour $x_1, \dots, x_i \in \mathcal{O}_X^*$.*

J'ignore si, pour $i \geq 2$, $v(i)$ est engendré localement pour la topologie de Zariski par les différentielles logarithmiques.

La démonstration qui suit reproduit, à quelques détails près, celle de Bloch (*loc. cit.*).

Commençons par montrer qu'on peut se ramener au cas où S est réduit. On peut d'abord supposer S affine et X de type fini sur S . Écrivant l'anneau de S comme limite inductive de ses sous- $\mathbb{F}_p$ -algèbres de type fini, et utilisant le fait que $W^* - C_{X/S} : Z\Omega_{X/S}^i \rightarrow \Omega_{X^{(p)}/S}^i$ commute aux limites inductives filtrantes d'anneaux de base, on se ramène au cas où S est de type fini sur $\mathbb{F}_p$, en particulier noethérien. L'idéal définissant S_{red} est donc nilpotent, de sorte que, pour étendre la conclusion du théorème de S_{red} à S , il suffit de faire le pas suivant : si S' est un sous-schéma de S défini par un idéal I de carré nul, et si la conclusion du théorème est vraie pour X'/S' , où $X' = X \times_S S'$, alors elle est vraie pour X/S . Soit $\omega \in Z\Omega_{X/S}^i$ une forme telle que $C\omega - W^*\omega = 0$, montrons que, localement pour la topologie étale sur X , ω est une somme de différentielles logarithmiques. L'image ω' de ω dans $Z\Omega_{X'/S'}^i$ vérifie $C\omega' - W^*\omega' = 0$, donc, par hypothèse, est, localement pour la topologie étale sur X' , somme de différentielles logarithmiques. Comme $\mathcal{O}_X^* \rightarrow \mathcal{O}_{X'}^*$ est surjectif et que les morphismes étales $U' \rightarrow X'$ se relèvent sur X , on voit que, quitte à se localiser pour la topologie étale sur X et à retrancher de ω une somme de différentielles logarithmiques, on peut supposer que $\omega' = 0$, en d'autres termes que $\omega \in I \cdot Z\Omega_{X/S}^i$. Du fait que $I^2 = 0$, donc *a fortiori* $I^p = 0$, W^* annule $I \cdot Z\Omega_{X/S}^i$, donc $v(i) \cap I \cdot Z\Omega_{X/S}^i = \text{Ker}(C_{X/S}) \cap I \cdot Z\Omega_{X/S}^i$, et comme $\Omega_{X^{(p)}/S}^i$ est plat sur S , on déduit de (2.1.11) :

$$v(i) \cap I \cdot Z\Omega_{X/S}^i = I \cdot B\Omega_{X/S}^i.$$

D'après 2.2.8(b'), toute section de $B\Omega_{X/S}^i$ est localement somme de formes du type $dx_1 d \log x_2 \dots d \log x_i$, avec $x_1, \dots, x_i \in \mathcal{O}_X^*$. On est donc ramené à montrer que, pour $a \in I$, $adx_1 d \log x_2 \dots d \log x_i$ est (localement pour la topologie étale sur X) somme de différentielles logarithmiques. Mais en fait, adx_1 est déjà une différentielle logarithmique :

$$adx_1 = -d \log(1 - ax_1)$$

(car $a^2 = 0$), d'où la conclusion.

Nous supposons donc désormais S réduit. W^* est alors injectif, et (2.4.1.1) donne, par passage au quotient, une suite exacte

$$(2.4.3) \quad 0 \rightarrow v(i) \rightarrow Z\Omega_{X/S}^i / B\Omega_{X/S}^i \xrightarrow{W^* - C_{X/S}} \Omega_{X^{(p)}/S}^i / B\Omega_{X^{(p)}/S}^i.$$

Notons $L = \mathbb{F}_p[\mathcal{O}_X^*]$ le $\mathbb{F}_p$ -module libre engendré par le faisceau d'ensembles $\mathcal{O}_X^*$ (pour la topologie étale, avec laquelle nous travaillerons dans toute la suite de cette démonstration) [cf. (SGA 4 II 6.5, IV 11.3)]. Si x est une section (locale) de $\mathcal{O}_X^*$, nous noterons $\underline{d} \log x$ son image dans $\mathbb{F}_p[\mathcal{O}_X^*]$ par l'application canonique. L'application

$$(2.4.4.0) \quad \prod_{1 \leq j \leq i} \mathcal{O}_X^* \rightarrow Z\Omega_{X/S}^i, \quad (x_1, \dots, x_i) \mapsto d \log(x_1) \dots d \log(x_i)$$

définit une application $\mathbb{F}_p$ -linéaire $\Lambda^i L \rightarrow Z\Omega_{X/S}^i$, d'où une application $\mathcal{O}_{X^{(p)}}$ -linéaire $\mathcal{O}_{X^{(p)}} \otimes \Lambda^i L \rightarrow Z\Omega_{X/S}^i$, et finalement une application $\mathcal{O}_{X^{(p)}}$ -linéaire

$$(2.4.4) \quad \varphi : \mathcal{O}_{X^{(p)}} \otimes \Lambda^i L \rightarrow H^i(\Omega_{X/S}^*),$$

telle que

$$\varphi(a \underline{d} \log x_1 \dots \underline{d} \log x_i) = \text{classe de } a d \log x_1 \dots d \log x_i,$$

pour $a \in \mathcal{O}_{X^{(p)}}$, $x_1, \dots, x_i \in \mathcal{O}_X^*$.

LEMME 2.4.5. — *L'application φ est surjective.*

Comme $\mathcal{O}_X$ est additivement engendré par $\mathcal{O}_X^*$, toute section de $\Omega_{X^{(p)}/S}^i$ est localement somme de formes du type $a W^*(d \log x_1 \dots d \log x_i)$, avec $a \in \mathcal{O}_{X^{(p)}}$, $x_1, \dots, x_i \in \mathcal{O}_X^*$. Or on a

$$\begin{aligned} C_{X/S}^{-1}(a W^*(d \log x_1 \dots d \log x_i)) &= a C_{X/S}^{-1}(W^*(d \log x_1 \dots d \log x_i)) \\ &= \text{classe de } a d \log x_1 \dots d \log x_i. \end{aligned}$$

L'assertion découle donc de 2.1.9.

D'autre part, l'application composée de (2.4.4.0) et W^* :

$$\prod_{1 \leq j \leq i} \mathcal{O}_X^* \rightarrow \Omega_{X^{(p)}/S}^i, \quad (x_1, \dots, x_i) \mapsto W^*(d \log x_1 \dots d \log x_i),$$

définit une application $\mathbb{F}_p$ -linéaire $\Lambda^i L \rightarrow \Omega_{X^{(p)}/S}^i$, d'où une application $\mathcal{O}_{X^{(p)}}$ -linéaire :

$$(2.4.6) \quad u : \mathcal{O}_{X^{(p)}} \otimes \Lambda^i L \rightarrow \Omega_{X^{(p)}/S}^i,$$

telle que

$$u(a \underline{d} \log x_1 \dots \underline{d} \log x_i) = a W^*(d \log x_1 \dots d \log x_i),$$

pour $a \in \mathcal{O}_{X^{(p)}}$, $x_1, \dots, x_i \in \mathcal{O}_X^*$, et, par passage au quotient, une application $\mathcal{O}_{X^{(p)}}$ -linéaire :

$$(2.4.7) \quad \psi : \mathcal{O}_{X^{(p)}} \otimes \Lambda^i L \rightarrow \Omega_{X^{(p)}/S}^i / B\Omega_{X^{(p)}/S}^i.$$

Les applications u et ψ sont surjectives.

LEMME 2.4.8. — *Le carré suivant est commutatif :*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{X^{(p)}} \otimes \Lambda^i L & \xrightarrow{\varphi} & H^i(\Omega_{X/S}^\bullet) \\ (F-1) \otimes 1 \downarrow & & \downarrow W^* - C_{X/S} \\ \mathcal{O}_{X^{(p)}} \otimes \Lambda^i L & \xrightarrow{\psi} & \Omega_{X^{(p)}/S}^i / B \Omega_{X^{(p)}/S}^i \end{array}$$

Pour $a \in \mathcal{O}_{X^{(p)}}$, $x_1, \dots, x_i \in \mathcal{O}_X^*$, on a en effet

$$\begin{aligned} (W^* - C_{X/S}) \varphi(\underline{a} \log x_1 \dots \underline{d} \log x_i) &= (W^* - C_{X/S})(\underline{a} \log x_1 \dots \underline{d} \log x_i) \\ &= \text{classe de } (a^p - a) W^*(\underline{d} \log x_1 \dots \underline{d} \log x_i) \\ &= \psi((a^p - a) \underline{d} \log x_1 \dots \underline{d} \log x_i). \end{aligned}$$

Grâce à (2.4.3), 2.4.5, 2.4.8 et à la surjectivité de (2.1.20), on obtient un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes (pour la topologie étale) :

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \rightarrow & R^i & \longrightarrow & Q^i & \longrightarrow & v(i) & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \rightarrow & N^i & \rightarrow & \mathcal{O}_{X^{(p)}} \otimes \Lambda^i L & \xrightarrow{\varphi} & H^i(\Omega_{X/S}^\bullet) & \longrightarrow 0 \\ & \downarrow & & \downarrow \otimes 1 & & \downarrow W^* - C_{X/S} & \\ 0 \rightarrow & P^i & \rightarrow & \mathcal{O}_{X^{(p)}} \otimes \Lambda^i L & \xrightarrow{\psi} & \Omega_{X^{(p)}/S}^i / B \Omega_{X^{(p)}/S}^i & \rightarrow 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & 0 & & 0 & \end{array}$$

L'énoncé 2.4.2 signifie que $Q^i \rightarrow v(i)$ est surjectif, ou, ce qui revient au même par le lemme du serpent, que $N^i \rightarrow P^i$ est surjectif. Il est vrai, comme on l'a vu plus haut, pour $i \leq 1$. Remarquons que, si l'on note α la flèche $(F-1) \otimes 1$ du diagramme ci-dessus, on a $\alpha(xy) = \alpha(x)y$ pour $x \in \mathcal{O}_{X^{(p)}} \otimes \Lambda^i L$, $y \in \Lambda^j L$ (le produit étant le produit extérieur). Pour établir la surjectivité de $N^i \rightarrow P^i$ pour tout i , il reste donc à démontrer le lemme suivant :

LEMME 2.4.9. — *Pour $i \geq 2$, P^i est localement engendré additivement par les éléments de la forme $y \underline{d} \log x_2 \dots \underline{d} \log x_i$, pour $x_2, \dots, x_i \in \mathcal{O}_X^*$, $y \in P^1$.*

Posons $M^i = \text{Ker}(u)$ (2.4.6). On a $M^i \subset P^i$. Soit z une section de P^i . Alors $u(z) \in B \Omega_{X^{(p)}/S}^i$, donc [2.2.8 (b')] $u(z)$ est localement somme de formes du type $\lambda W^*(dx_1) W^*(\underline{d} \log x_2 \dots \underline{d} \log x_i)$, pour $\lambda \in \mathcal{O}_S$, $x_1, \dots, x_i \in \mathcal{O}_X^*$. Donc, quitte à retrancher de z une somme d'éléments de la forme $\lambda W^*(x_1) \underline{d} \log x_1 \dots \underline{d} \log x_i$ [qui sont de la forme requise dans le lemme, car $\lambda W^*(x_1) \underline{d} \log x_1 \in P^1$], on peut supposer que $u(z) = 0$. Mais cela entraîne (par l'exactitude à droite de Λ) que z est localement somme d'éléments de la forme

$y d \log x_2 \dots d \log x_i$, avec $y \in M^1$, $x_2, \dots, x_i \in \mathcal{O}_X^*$, et comme $M^1 \subset P^1$, le lemme est démontré, et, partant, le théorème 2.4.2.

Ce théorème répond à une question de Milne [51], 1.4. Si X/S est de dimension relative $\leq p$, on en déduit, sous les hypothèses de 2.4.1, une suite exacte pour la topologie étale

$$(2.4.10) \quad \underline{SK}_i(\mathcal{O}_X) \rightarrow Z\Omega_{X/S}^i \xrightarrow{w^* - C_{X/S}} \Omega_{X^{(p)}/S}^i \rightarrow 0,$$

où $\underline{SK}_i(\mathcal{O}_X)$ est le sous-faisceau du faisceau $\underline{K}_i(\mathcal{O}_X)$ de Quillen engendré par les symboles $\{x_1, \dots, x_i\}$ (pour $x_1, \dots, x_i \in \mathcal{O}_X^*$), et la première flèche est l'homomorphisme « $(-1)^{i-1} c_i / (i-1)!$ » de Bloch [12], I, § 3, qui envoie $\{x_1, \dots, x_i\}$ sur $d \log x_1 \dots d \log x_i$. On ignore si le noyau de cette flèche est exactement $p \underline{SK}_i(\mathcal{O}_X)$.

2.5. *Formes indéfiniment fermées.* — On désigne par S un schéma parfait de car. p .

2.5.1. Soit X un schéma lisse sur S . Posons

$$(2.5.1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} Z_\infty \Omega_X^i = \bigcap_{n \geq 0} Z_n \Omega_X^i, \\ B_\infty \Omega_X^i = \bigcup_{n \geq 0} B_n \Omega_X^i, \end{array} \right.$$

où $Z_n \Omega_X^i = Z_n \Omega_{X/S}^i$, $B_n \Omega_X^i = B_n \Omega_{X/S}^i$ (2.2.2). Rappelons que $Z_1 \Omega_X^i$ est le faisceau des i -formes fermées, et que l'opération de Cartier inverse $C^{-1} = C_X^{-1}$ (2.1.4) définit un isomorphisme $Z_n \xrightarrow{\sim} Z_{n+1}/B_1$, d'inverse donné par l'opération de Cartier $C = C_X$ (2.1.21). $Z_\infty \Omega_X^i$ est donc le faisceau des i -formes x telles que $dx=0$, $dCx=0$, $\dots$, $dC^n x=0$, $\dots$, dites encore *formes indéfiniment fermées*. C opère sur ce faisceau, et les suites exactes (cf. 2.2.5) :

$$(2.5.1.2) \quad 0 \rightarrow B_n \Omega_X^i \rightarrow Z_n \Omega_X^i \xrightarrow{C^n} \Omega_X^i \rightarrow 0$$

montrent que $B_\infty \Omega_X^i$ est le sous-faisceau de C -torsion de $Z_\infty \Omega_X^i$. Sur le quotient $Z_\infty \Omega_X^i / B_\infty \Omega_X^i$, C induit un opérateur injectif, qui est en fait un automorphisme. Par passage à la limite projective suivant les inclusions naturelles, les suites exactes

$$0 \rightarrow B_1 \Omega_X^i \rightarrow Z_{n+1} \Omega_X^i \xrightarrow{C} Z_n \Omega_X^i \rightarrow 0$$

fournissent en effet une suite exacte

$$(2.5.1.3) \quad 0 \rightarrow B_1 \Omega_X^i \rightarrow Z_\infty \Omega_X^i \xrightarrow{C} Z_\infty \Omega_X^i \rightarrow 0.$$

Par ailleurs, $C^{-1} : \Omega_X^i \rightarrow \Omega_X^i / B_1$ induit des isomorphismes $B_n \xrightarrow{\sim} B_{n+1}/B_1$, d'où, par passage à la limite inductive, un isomorphisme $B_\infty \xrightarrow{\sim} B_\infty / B_1$, et, par passage au quotient, une

injection

$$(2.5.1.3) \quad C^{-1}: \Omega_X^i/B_\infty \Omega_X^i \rightarrow \Omega_X^i/B_\infty \Omega_X^i,$$

dont l'image est $Z_1 \Omega_X^i/B_\infty \Omega_X^i$. Plus généralement, l'image de C^{-n} est $Z_n \Omega_X^i/B_\infty \Omega_X^i$, et l'on vérifie aisément que l'on a

$$(2.5.1.4) \quad Z_\infty \Omega_X^i/B_\infty \Omega_X^i = \bigcap_{n \geq 0} C^{-n}(\Omega_X^i/B_\infty \Omega_X^i).$$

L'opérateur induit par C^{-1} sur $Z_\infty \Omega_X^i/B_\infty \Omega_X^i$ est inverse de C .

On supposera désormais que S est le spectre d'un corps parfait k .

Le résultat suivant et ses corollaires sont dus à Raynaud [63].

PROPOSITION 2.5.2. — Soient X un S -schéma lisse de type fini, et $i \in \mathbb{Z}$. Si V est un sous- k -espace de dimension finie de $H^0(X, Z_\infty \Omega_X^i)$, alors le sous-espace stable par C engendré par V , $\sum_{n \geq 0} C^n V$, est de dimension finie sur k .

2.5.3. Différons la démonstration, pour dégager tout de suite quelques conséquences. Soit X un S -schéma lisse. Il résulte de 2.5.2 que, pour tout ouvert affine U de X , $Z_\infty \Omega_X^i(U)$ est réunion de ses sous- k -espaces de dimension finie E stables par C . Comme k est parfait, chaque E se décompose canoniquement en

$$E = E_{\text{nilp}} \oplus E_{\text{ss}},$$

où E_{nilp} est le plus grand sous-espace sur lequel C est nilpotent, donc $E_{\text{nilp}} = E \cap B_\infty \Omega_X^i(U)$, et E_{ss} la partie « semi-simple » de C , i.e. $\bigcap_{n \geq 0} C^n E$, sur laquelle C est un automorphisme. On en déduit une décomposition canonique

$$(2.5.3.1) \quad Z_\infty \Omega_X^i(U) = B_\infty \Omega_X^i(U) \oplus Z_\infty \Omega_X^i(U)_{\text{ss}},$$

avec

$$(2.5.3.2) \quad Z_\infty \Omega_X^i(U)_{\text{ss}} = \bigcup^{\text{dfn}} E_{\text{ss}},$$

où E parcourt les sous- k -espaces de dimension finie de $Z_\infty \Omega_X^i(U)$ stables par C . La formation de la partie semi-simple étant fonctorielle en le k -espace de dimension finie muni d'un opérateur p^{-1} -linéaire, les $Z_\infty \Omega_X^i(U)_{\text{ss}}$, pour U ouvert affine variable de X , forment un sous-faisceau $(Z_\infty \Omega_X^i)_{\text{ss}}$ de $Z_\infty \Omega_X^i$, et la décomposition (2.5.3.1) se faisceautise en

$$(2.5.3.3) \quad Z_\infty \Omega_X^i = B_\infty \Omega_X^i \oplus (Z_\infty \Omega_X^i)_{\text{ss}}.$$

Rappelons (2.4.1) qu'on a défini le faisceau de $\mathbb{F}_p$ -vectoriels

$$(2.5.3.4) \quad v(i) = \text{Ker}(1 - C : Z_1 \Omega_X^i \rightarrow \Omega_X^i) = \text{Ker}(1 - C : Z_\infty \Omega_X^i \rightarrow Z_\infty \Omega_X^i),$$

qui, d'après 2.4.2, est formé des différentielles qui, localement pour la topologie étale, sont logarithmiques. Il résulte encore de 2.5.2 que, si k est algébriquement clos, la flèche canonique

$$(2.5.3.5) \quad v(i) \otimes_{\mathbb{F}_p} k \rightarrow (Z_\infty \Omega_X^i)_{ss}$$

est un isomorphisme. En effet, pour tout sous-espace E comme en 2.5.3.0, on sait que, k étant algébriquement clos, E possède une k -base de vecteurs fixes par C , i.e. que la flèche canonique $\text{Ker}(1 - C : E \rightarrow E) \otimes_{\mathbb{F}_p} k \rightarrow E$ est un isomorphisme. Plus généralement, sans supposer k algébriquement clos, on voit que, pour toute section x de $(Z_\infty \Omega_X^i)_{ss}$ (sur un ouvert affine de X), il existe une extension finie k' de k telle que x soit combinaison k' -linéaire de sections de $Z_\infty \Omega_X^i \otimes k' (= Z_\infty \Omega_{(X \otimes_k k')}^i)$ fixes par C , donc localement (pour la topologie étale) logarithmiques sur $X \otimes k'$.

Ces remarques, jointes à (2.5.1.4), entraînent le fait suivant : si V est un k -sous-espace de dimension finie de $\Omega_X^i(U)/B_\infty \Omega_X^i(U)$ pour U un ouvert affine de X , on a

$$(2.5.3.6) \quad \dim_k \left(\sum_{n \geq 0} C^{-n} V \right) < +\infty \Leftrightarrow V \subset Z_\infty \Omega_X^i(U)/B_\infty \Omega_X^i(U).$$

La démonstration de 2.5.2 va reposer sur le lemme suivant :

LEMME 2.5.4. — Soient X un S -schéma de type fini, normal, et x un point de codimension 1 de X . Soient r un entier ≥ 1 , et ω une forme méromorphe fermée sur X , ayant en x un pôle d'ordre $\leq p^r$. Alors $C\omega$ a en x un pôle d'ordre $\leq p^{r-1}$.

Soit z une équation locale en x du sous-schéma fermé intègre adhérence de x dans X . Par hypothèse, ω s'écrit, au voisinage de x , $\omega = z^{-p^r} \omega_1$, avec ω_1 holomorphe au voisinage de x . Nécessairement, ω_1 est fermée, et, par la p^{-1} -linéarité de C , on a $C\omega = z^{-p^{r-1}} C\omega_1$, d'où la conclusion.

Prouvons maintenant 2.5.2. Soit $(\omega_1, \dots, \omega_r)$ une base de V . Il s'agit de prouver que le sous-espace de $H^0(X, Z_\infty \Omega_X^i)$ engendré par les $C^n \omega_j$, $n \geq 0$, $1 \leq j \leq r$, est de dimension finie. On peut supposer X affine, et plonger X comme ouvert dans un schéma normal $\bar{X}$, propre sur k . Soit P l'ensemble (fini) des points de codimension 1 de $\bar{X}$ n'appartenant pas à X , et soit N un entier ≥ 1 tel que, pour $1 \leq j \leq r$, ω_j ait en tout point $x \in P$ un pôle d'ordre $\leq p^N$. D'après 2.5.4, il en est de même alors de $C^n \omega_j$ pour $1 \leq j \leq r$ et tout $n \geq 0$. Si $X' \supset X$ désigne l'ouvert de lissité de $\bar{X}$, il existe donc un diviseur effectif D de X' , de support contenu dans $\bar{X} - X$, tel que l'on ait

$$(\star) \quad \sum_{n \geq 0} C^n V \subset H^0(X', \Omega_{X'}^i(D)).$$

Mais, $\bar{X}$ étant propre et normal, le second membre de $(\star)$ est de dimension finie sur k , d'où la conclusion de 2.5.2.

Notons par ailleurs la conséquence immédiate suivante de 2.5.4 :

COROLLAIRE 2.5.5. — *Sous les hypothèses de 2.5.4, supposons que ω vérifie $C\omega = \omega$. Alors, ωa , en x , un pôle d'ordre ≤ 1 .*

Par un argument analogue à celui utilisé pour démontrer 2.5.2, on en déduit :

COROLLAIRE 2.5.6. — *Soient X un S -schéma lisse de type fini, et $i \in \mathbb{Z}$. Alors le sous- k -espace de $H^0(X, \Omega_X^i)$ engendré par les formes fermées fixes par C [i.e. les sections globales de $v(i)$] est de dimension finie.*

Remarque 2.5.7. — Le sous-espace considéré dans 2.5.6 s'identifie à $H^0(X, v(i)) \otimes k$ par l'application canonique $H^0(X, v(i)) \otimes k \rightarrow H^0(X, Z\Omega_X^i)$. Cette application est en effet injective : cela résulte, par réduction au cas où k est algébriquement clos, de l'isomorphisme (2.5.3.5). Par suite, $H^0(X, v(i))$ est de dimension finie sur $\mathbb{F}_p$.

3. COHOMOLOGIE CRISTALLINE.

3.1. PD-complexes de De Rham.

3.1.1. Soit T un topos, et soit A un anneau (commutatif, unitaire) de T . Nous appellerons *A-algèbre différentielle graduée* (en abrégé, *A-adg*) toute A -algèbre graduée B à degrés ≥ 0 , strictement anticommutative (i.e. telle que $xy = (-1)^{ij}yx$ pour $x \in B^i$, $y \in B^j$, et $x^2 = 0$ pour $x \in B^i$, i impair), munie d'une différentielle A -linéaire $d : B^i \rightarrow B^{i+1}$ telle que $d^2 = 0$, et $d(xy) = (dx)y + (-1)^i xdy$. Un homomorphisme de A -adg est un homomorphisme de A -algèbres graduées, compatible aux différentielles. Rappelons que si R est une A -algèbre (commutative, unitaire), le complexe de De Rham $\Omega_{R/A}^\bullet$ est une A -adg, universelle dans le sens que tout morphisme de A -algèbres $R \rightarrow B^0$, où B est une A -adg, se prolonge de manière unique en un morphisme de A -adg $\Omega_{R/A}^\bullet \rightarrow B$.

Soit B une A -adg. Nous appellerons *B-module différentiel gradué (à gauche)* (en abrégé, *B-mdg*) tout B -module (à gauche) gradué M , muni d'une différentielle $d : M^i \rightarrow M^{i+1}$ telle que $d^2 = 0$, et $d(bx) = (db)x + (-1)^i bdx$ pour $b \in B^i$, $x \in M^j$. Un morphisme de B -mdg est un morphisme de B -modules gradués, compatible aux différentielles. Définition analogue pour la notion de B -mdg à droite. Tout B -mdg à droite M peut être considéré comme un B -mdg à gauche par la règle $bx = (-1)^{ij}xb$, pour $b \in B^i$, $x \in M^j$. Par un *idéal différentiel gradué* de B (en abrégé, *idg* de B), on entendra un sous- B -mdg de B considéré comme B -mdg à gauche (c'est alors automatiquement un sous- B -mdg de B considéré comme B -mdg à droite). Si I^0 est un idéal de B^0 , l'idéal gradué de B engendré par I^0 et dI^0 est un idg I de B , dont la composante de degré 0 est I^0 , et qui est le plus petit idg de B ayant cette propriété : on dit que I est l'*idg engendré par I^0* ; pour tout n , I^n est engendré additivement par les éléments de la forme $bdx_1 \dots dx_n$, pour $b \in B^0$, $x_1, \dots, x_n \in I^0$. Si J est un idg de B , l'algèbre graduée quotient B/J , munie de la différentielle définie par passage au quotient est une A -adg.

Soit E un B^0 -module. Nous appellerons *connexion sur E relativement à B* un homomorphisme $\nabla : E \rightarrow E \otimes_{B^0} B^1$ tel que $\nabla(bx) = b\nabla x + x \otimes db$ pour tout $b \in B^0$ et tout $x \in E$. Toute connexion ∇ sur E rel. à B se prolonge, de manière unique, en un homomorphisme $\nabla : E \otimes_{B^0} B^i \rightarrow E \otimes_{B^0} B^{i+1}$ tel que $\nabla(x \otimes b) = (\nabla x)b + x \otimes db$, pour

tout $b \in B^i$ et $x \in E$. On dira que ∇ est *intégrable* si le composé ∇^2 (qui est B^0 -linéaire) est nul (il suffit pour cela que $\nabla^2|_E = 0$). Si ∇ est intégrable, le B -module gradué $E \otimes_{B^0} B$, muni de la différentielle ∇ , est un B -mdg, dit complexe correspondant à (E, ∇) .

3.1.2. Soient A un anneau de T , (B, I, γ) une A -PD-algèbre. L'idéal de $\Omega_{B/A}^\bullet$ engendré par les éléments $d(\gamma_n(x)) - \gamma_{n-1}(x)dx$, pour $x \in I, n \geq 1$, est un idg J . Le quotient $\Omega_{B/A}^\bullet/J$ est donc une A -adg, qu'on appellera *PD-complexe de De Rham de B/A* , et qu'on notera

$$(3.1.2.1) \quad \Omega_{B/A, \gamma}^\bullet.$$

Il possède la propriété universelle suivante : si C est une A -adg, munie d'un PD-idéal K de C^0 , de puissances divisées δ compatibles à d en ce sens que $d(\delta_n x) = \delta_{n-1}(x)dx$ pour tout $x \in K$, et tout $n \geq 1$, alors tout homomorphisme de A -PD-algèbres $f^0 : B \rightarrow C^0$ se prolonge de manière unique en un homomorphisme de A -adg $f : \Omega_{B/A, \gamma}^\bullet \rightarrow C$.

3.1.3. Soient (A, I, γ) un PD-anneau de T , B une A -algèbre, J un idéal de B , $\bar{B} = D_{B, \gamma}(J)$ l'enveloppe à puissances divisées, compatible à γ , de (B, J) [4], I 2.4.2, $\bar{J}$ le PD-idéal de $\bar{B}$ enveloppe de J ; pour $x \in \bar{J}$, on notera $x^{[n]}$ la n -ième puissance divisée de x . Rappelons que $\bar{B}$ est engendré comme B -algèbre par les $x^{[n]}$, pour $x \in J$, et que, si les puissances divisées γ s'étendent à B/J , on a canoniquement $\bar{B}/\bar{J} = B/J$. On a de plus le résultat suivant [4], IV 1.3.5 :

PROPOSITION 3.1.4. — *La dérivation $d : B \rightarrow \Omega_{B/A}^1$ se prolonge de manière unique en une dérivation $d : \bar{B} \rightarrow \bar{B} \otimes_B \Omega_{B/A}^1$ telle que*

$$(3.1.4.1) \quad dx^{[n]} = x^{[n-1]} \otimes dx,$$

pour tout $x \in J$ et tout $n \geq 1$.

Dans (*loc. cit.*), ce résultat est corollaire de la théorie des hyper-PD-stratifications. On peut le vérifier directement de la manière suivante. Munissons l'idéal de carré nul $\bar{B} \otimes_B \Omega_{B/A}^1$ de l'algèbre des nombres duaux $C = \bar{B} \oplus (\bar{B} \otimes_B \Omega_{B/A}^1)$ de la PD-structure $u \mapsto u^{[n]}$ telle que $u^{[n]} = 0$ pour $n \geq 2$. D'après [4], I 1.6.5, il existe alors sur l'idéal $\bar{J} \cdot C + (\bar{B} \otimes_B \Omega_{B/A}^1)$ de C une unique PD-structure δ compatible aux PD-structures de $\bar{J}$ et $\bar{B} \otimes_B \Omega_{B/A}^1$; δ vérifie :

$$(\star) \quad \delta_n(x \oplus u) = x^{[n]} \oplus x^{[n-1]}u,$$

pour $x \in \bar{J}, u \in \bar{B} \otimes_B \Omega_{B/A}^1$. Par construction, δ est compatible à γ . En vertu de la propriété universelle de $\bar{B}$, l'homomorphisme

$$B \rightarrow C, \quad b \mapsto b \cdot 1_{\bar{B}} \oplus (1_{\bar{B}} \otimes db),$$

se prolonge en un A -PD-morphisme $\bar{B} \rightarrow C$, section de la projection $C \rightarrow \bar{B}$, donc de la forme $x \mapsto x \oplus dx$, où d est une A -dérivation de $\bar{B}$ dans $\bar{B} \otimes_B \Omega_{B/A}^1$. Le fait que ce morphisme soit un PD-morphisme entraîne, d'après $(\star)$, que $dx^{[n]} = x^{[n-1]} \otimes dx$ pour tout $x \in J$ et tout $n \geq 1$, ce qui prouve l'assertion d'existence. L'unicité est évidente.

La dérivation $d: \bar{B} \rightarrow \bar{B} \otimes_B \Omega_{B/A}^1$ se prolonge de manière unique en une antidérivation d de la A -algèbre graduée $\bar{B} \otimes_B \Omega_{B/A}^\bullet$, et d'après (3.1.4.1), $d^2 = 0$. En vertu de 3.1.2, il existe donc un unique homomorphisme de A -adg :

$$(3.1.5) \quad \Omega_{B/A, \{ \}}^\bullet \rightarrow \bar{B} \otimes_B \Omega_{B/A}^\bullet,$$

égal à l'identité en degré zéro.

PROPOSITION 3.1.6. — *L'homomorphisme (3.1.5) est un isomorphisme.*

En effet, il résulte aussitôt des définitions que l'homomorphisme de A -algèbres graduées

$$\bar{B} \otimes_B \Omega_{B/A}^\bullet \rightarrow \Omega_{B/A, \{ \}}^\bullet,$$

égal à l'identité en degré 0 et au composé des flèches canoniques

$$\bar{B} \otimes_B \Omega_{B/A}^1 \rightarrow \Omega_{B/A}^1 \rightarrow \Omega_{B/A, \{ \}}^1,$$

en degré 1, est compatible aux différentielles, et par suite inverse de (3.1.5).

COROLLAIRE 3.1.7. — *Soient M une A -adg, K un idéal de M^0 muni d'une PD-structure compatible à d (au sens de 3.1.2) et à γ . Tout homomorphisme de A -algèbres $f: B \rightarrow M^0$ tel que $f(J) \subset K$ se prolonge de manière unique en un homomorphisme de A -adg $\bar{f}: \bar{B} \otimes_B \Omega_{B/A}^\bullet \rightarrow M$ tel que $\bar{f}^0$ soit un PD-morphisme.*

Cela découle immédiatement de 3.1.2, 3.1.6, et de la propriété universelle de $\bar{B}$.

3.2. *Calcul de la cohomologie cristalline.* — Pour les rappels qui suivent, la référence de base est l'ouvrage de Berthelot [4], mais les notes de Berthelot-Ogus [11] suffisent. Le lecteur pressé pourra également consulter les résumés [33] et [34].

3.2.1. Soient S un schéma où le nombre premier p fixé est localement nilpotent, I un idéal quasi cohérent de $\mathcal{O}_S$, γ une PD-structure sur I (autrement dit, (S, I, γ) est un PD-schéma au sens de [4], I 1.9.6). Soit X un S -schéma tel que les puissances divisées γ s'étendent à X [4], I 2.1 (i.e. tel qu'il existe une PD-structure sur $I \cdot \mathcal{O}_X$ telle que $X \rightarrow S$ soit un PD-morphisme; cette condition est automatiquement remplie si I est localement principal, ce qui couvre le cas essentiel que nous avons en vue, où $S = W_n(S_0)$, S_0 le spectre d'un corps parfait (plus généralement un schéma parfait) de car. p , I étant l'idéal (p) , muni des puissances divisées canoniques). Rappelons la définition du site cristallin de X par rapport à (S, I, γ) , $\text{Cris}(X/S)$ [4], III 1.1.1. Les objets sont les S -PD-épaississements d'ouverts de Zariski de X , i.e. les triplets (U, T, δ) , où U est un ouvert de Zariski de X , T un S -schéma muni d'une S -immersion fermée de U dans T , définie par un idéal J muni de puissances divisées δ compatibles à γ (J est alors un nilidéal, donc T et U ont même espace sous-jacent); une flèche $(U, T, \delta) \rightarrow (U', T', \delta')$ est un S -PD-morphisme $T \rightarrow T'$ envoyant U dans U' ; la topologie est définie par la prétopologie pour laquelle les familles couvrantes sont les familles $(U_\alpha, T_\alpha, \delta_\alpha) \rightarrow (U, T, \delta)$ telles que les T_α forment un recouvrement ouvert de T . Le topos des faisceaux sur $\text{Cris}(X/S)$ est noté $(X/S)_{\text{cris}}$ (ou, s'il y a lieu de préciser, $(X/S, I, \gamma)_{\text{cris}}$). Rappelons (*loc. cit.*) qu'un faisceau E sur le site cristallin de X/S peut être décrit comme la

donnée, pour chaque objet (U, T, δ) d'un faisceau $E_{(U, T, \delta)}$ (ou $E_{(T)}$) sur T (pour la topologie de Zariski), et pour chaque flèche $f: (U', T', \delta') \rightarrow (U, T, \delta)$ d'une flèche $f^* E_{(T)} \rightarrow E_{(T')}$, vérifiant la condition de transitivité habituelle pour un composé fg , et étant un isomorphisme quand $T \rightarrow T'$ est une immersion ouverte. Comme exemples de faisceaux sur $\text{Cris}(X/S)$, citons le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_{X/S}$, dit *faisceau structural*, défini par $(U, T, \delta) \mapsto \mathcal{O}_T$, et le faisceau d'idéaux $J_{X/S} \subset \mathcal{O}_{X/S}$ associant à chaque (U, T, δ) l'idéal définissant U dans T . On dit qu'un $\mathcal{O}_{X/S}$ -module E est un *cristal* (en $\mathcal{O}_{X/S}$ -modules) si, pour chaque flèche $(U', T', \delta') \xrightarrow{f} (U, T, \delta)$ du site cristallin, la flèche correspondante $f^* E_{(T)} \rightarrow E_{(T')}$ est un isomorphisme (de $\mathcal{O}_T$ -modules). Ainsi, $\mathcal{O}_{X/S}$, considéré comme $\mathcal{O}_{X/S}$ -module, est un cristal, mais non $J_{X/S}$ en général.

3.2.2. Notons X_{zar} le topos zariskien de X . On a un morphisme canonique de topos [4], III 3.2 :

$$u_{X/S}: (X/S)_{\text{cris}} \rightarrow X_{\text{zar}},$$

tel que $\Gamma(U, u_{X/S*} E) = \Gamma((U/S)_{\text{cris}}, E|_{(U/S)_{\text{cris}}})$ pour tout faisceau cristallin E et tout ouvert de Zariski U de X [le foncteur image inverse $u_{X/S}^{-1}$ est donné par $(u_{X/S}^{-1}(F))_{(U, T, \delta)} = F|_U$]. Le morphisme $u_{X/S}$ est un morphisme de topos annelés de façon naturelle quand on munit X non pas du faisceau structural mais du faisceau $f^{-1}(\mathcal{O}_S)$ (où $f: X \rightarrow S$ est la projection) et $(X/S)_{\text{cris}}$ du faisceau structural. Le foncteur $R u_{X/S*}$ envoie $D^+((X/S)_{\text{cris}})$ ($\stackrel{\text{dfn}}{=} D^+((X/S)_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{X/S})$) dans $D^+(X, f^{-1}\mathcal{O}_S)$, et si $f_{\text{cris}}: (X/S)_{\text{cris}} \rightarrow S$ désigne la projection, on a un isomorphisme canonique de $D^+(S, \mathcal{O}_S)$:

$$R f_{\text{cris}*} E = R f_* R u_{X/S*} E,$$

pour tout $E \in \text{ob } D^+((X/S)_{\text{cris}})$.

3.2.3. Soit E un cristal en $\mathcal{O}_{X/S}$ -modules (au chapitre II nous n'aurons besoin que du cas $E = \mathcal{O}_{X/S}$). Rappelons le calcul standard de $R u_{X/S*} E$ quand X/S est *lissifiable*. Soit $i: X \rightarrow Y$ une S -immersion fermée, définie par un idéal J , dans un S -schéma lisse Y . Notons $\bar{Y}$ l'enveloppe à puissance divisées, compatible à γ , de J (notée $D_{X, \gamma}(Y)$ dans [4], I 4.1.3). D'après [4], IV 1.3.4, 1.3.5, $i_{\text{cris}*}(E)$ est un cristal en $\mathcal{O}_{Y/S}$ -modules, tel que $i_{\text{cris}*}(E)_Y = E_{\bar{Y}}$. Le $\mathcal{O}_Y$ -module $E_{\bar{Y}}$ est donc muni, d'après [4], IV 1.6.5, d'une connexion intégrable rel. à S , de sorte qu'on peut former le complexe de De Rham de Y/S à coefficients dans $E_{\bar{Y}}$, $E_{\bar{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^\bullet$. Quand $E = \mathcal{O}_{X/S}$, ce complexe n'est autre que le complexe

$$\mathcal{O}_{\bar{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^\bullet = \Omega_{Y/S, [\]}^\bullet \text{ considéré dans (3.1.5), d'après [4], IV 1.3.5. (On peut encore inter-}$$

prêter le complexe $E_{\bar{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^\bullet$ de la manière suivante : d'après [4], IV 1.6.3, $E_{\bar{Y}}$ est muni d'une stratification rel. au PD-groupe affine $D_X(Y/S)$ formé des enveloppes $D_X(Y^k/S)$; d'après [4], IV 1.3.5, ce groupe est différentiellement lisse [4], II 4.3.2 et son complexe de De Rham est $\mathcal{O}_{\bar{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^\bullet$; en vertu de [4], II 4.3.10, $E_{\bar{Y}}$ est donc muni d'une connexion

intégrable rel. à $\mathcal{O}_{\bar{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^\bullet$, et le complexe correspondant (cf. 3.1) s'identifie, d'après [4],

IV 1.3.5, au complexe $E_{\bar{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^\bullet$ défini ci-dessus.) Cela posé, on a le résultat fondamental :

THÉOREME 3.2.4. — *Il existe un isomorphisme canonique de $D(X, f^{-1}(\mathcal{O}_S))$:*

$$(3.2.4.1) \quad Ru_{X/S*} E \xrightarrow{\sim} E_{\bar{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^\bullet.$$

En effet, on a $Ru_{X/S*} E = Ru_{Y/S*} i_{\text{cris}*} E$ (le foncteur $i_{\text{cris}*}$ étant exact [4], IV 1.3.2), ce qui ramène au cas où X est lisse sur S . L'énoncé n'est alors qu'un cas particulier de [4], V 2.3.2.

La démonstration de (*loc. cit.*) montre de plus que, lorsque $E = \mathcal{O}_{X/S}$ (ou plus généralement est un cristal en $\mathcal{O}_{X/S}$ -algèbres), l'isomorphisme (3.2.4.1) est compatible aux structures naturelles de produit des deux membres.

Il découle de 3.2.4 que le complexe $E_{\bar{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^\bullet$ est indépendant, à isomorphisme près dans $D(X, f^{-1}(\mathcal{O}_S))$, du choix de la lissification i . Plus précisément, si $j : X \rightarrow Z$ est une S -immersion fermée dans un schéma Z lisse sur S , et si $h : Y \rightarrow Z$ est un S -morphisme tel que $hi=j$, l'homomorphisme

$$(3.2.4.2) \quad E_{\bar{Z}} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \Omega_{Z/S}^\bullet \rightarrow E_{\bar{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^\bullet$$

induit par h est un quasi isomorphisme de complexes de $f^{-1}(\mathcal{O}_S)$ -modules.

3.2.5. L'isomorphisme (3.2.4.1) possède les propriétés de fonctorialité et de compatibilité au changement de base suivantes :

(a) *Fonctorialité.* — Considérons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{i'} & Y' \\ \downarrow g & & \downarrow i \\ X & \xrightarrow{i} & Y \\ & \searrow f & \downarrow \\ & & S \end{array}$$

où i, i' sont des immersions fermées, Y, Y' sont lisses sur S . On suppose que les puissances divisées γ s'étendent aux schémas de ce diagramme. Soient E (resp. E') un cristal en $\mathcal{O}_{X/S}$ -modules (resp. $\mathcal{O}_{X'/S}$ -modules), et $a : E \rightarrow Rg_* E'$ une flèche de $D((X/S)_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{X/S})$. Grâce à la commutativité du carré

$$\begin{array}{ccc} (X'/S)_{\text{cris}} & \xrightarrow{\theta_{\text{cris}}} & (X/S)_{\text{cris}} \\ u_{X'/S} \downarrow & & \downarrow u_{X/S} \\ X'_{\text{zar}} & \longrightarrow & X_{\text{zar}} \end{array}$$

on déduit de a une flèche

$$Ru_{X/S_*} E \rightarrow Rg_* Ru_{X'/S_*} E'.$$

D'autre part, a définit, grâce au diagramme, une flèche

$$E_{\bar{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{Y}}} \Omega_{Y/S}^\bullet \rightarrow Rg_* (E_{\bar{Y}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{Y}'}} \Omega_{Y'/S}^\bullet).$$

Ces deux flèches rendent commutatif le carré suivant, où les flèches verticales sont les isomorphismes définis par (3.2.4.1) :

$$\begin{array}{ccc} Ru_{X/S_*} E & \rightarrow & Rg_* Ru_{X'/S_*} E' \\ \downarrow & & \downarrow \\ E_{\bar{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{Y}}} \Omega_{Y/S}^\bullet & \rightarrow & Rg_* (E_{\bar{Y}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{Y}'}} \Omega_{Y'/S}^\bullet) \end{array}$$

(cf. [4], V2.3.4).

(b) *Changement de base.* — Considérons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & Y & \xrightarrow{j} & Y' \\ & \searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & (S, I, \gamma) & \xrightarrow{h} & (S', I', \gamma') \end{array}$$

où h est un PD-morphisme, i et j sont des immersions fermées, Y/S et Y'/S' sont lisses. Soit E un cristal en $\mathcal{O}_{X/S'}$ -modules. On a alors des flèches canoniques $Ru_{X/S_*} E \rightarrow Ru_{X'/S_*} E$, $E_{\bar{Y}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{Y}'}} \Omega_{Y'/S'}^\bullet \rightarrow E_{\bar{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{Y}}} \Omega_{Y/S}^\bullet$, qui rendent commutatif le carré

$$\begin{array}{ccc} Ru_{X/S_*} E & \rightarrow & Ru_{X'/S_*} E \\ (3.2.4.1) \downarrow \cong & & \cong \downarrow (3.2.4.1) \\ E_{\bar{Y}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{Y}'}} \Omega_{Y'/S'}^\bullet & \xrightarrow{(\star)} & E_{\bar{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{Y}}} \Omega_{Y/S}^\bullet \end{array}$$

(cf. *loc. cit.*). Rappelons d'autre part que si le carré

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{j} & Y' \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{h} & S' \end{array}$$

est cartésien et si h induit un isomorphisme entre les sous-schémas définis par I et I' , alors, d'après [4], I 2.8.2, la flèche naturelle $j^* \mathcal{O}_{\bar{Y}'} \rightarrow \mathcal{O}_{\bar{Y}}$ est un isomorphisme, donc aussi la flèche

$$(E_{\bar{Y}'} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{Y}'}} \Omega_{Y'/S'}^\bullet) \otimes_{\mathcal{O}_{S'}} \mathcal{O}_S \rightarrow E_{\bar{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_{\bar{Y}}} \Omega_{Y/S}^\bullet,$$

déduite de $(\star)$.

3.2.6. Les techniques de descente cohomologique permettent d'étendre le procédé de calcul 3.2.4 au cas non lissifiable. Soit $f: X \rightarrow S$ un morphisme localement de type fini. Il existe alors un hyperrecouvrement ouvert $p: U \rightarrow X$ et une S -immersion fermée $i: U \rightarrow Y$ dans un schéma simplicial Y lisse sur S (i.e. telle que chaque composante Y_n soit lisse sur S). Notons $(U/S)_{\text{cris}}$ le topos défini par le topos simplicial $[n] \mapsto (U_n/S)_{\text{cris}}$, dont les objets sont les systèmes de faisceaux $L_n \in \text{ob}(U_n/S)_{\text{cris}}$, $U_\varphi^* L_n \rightarrow L_m$ pour $\varphi: [n] \rightarrow [m]$, avec condition de transitivité (cf. [32], VI et [4], V 3.4.1). Si U_{zar} désigne le topos défini de manière analogue par le topos simplicial $[n] \mapsto (U_n)_{\text{zar}}$, les morphismes $u_{U_n/S}$ définissent un morphisme de topos $u: (U/S)_{\text{cris}} \rightarrow U_{\text{zar}}$. Soit L un $\mathcal{O}_{U/S}$ -module dont la restriction à chaque U_n est un cristal, alors, par le même argument que celui utilisé pour prouver 3.2.4, on montre l'existence d'un isomorphisme canonique

$$(3.2.6.1) \quad Ru_{U/S*} L \xrightarrow{\sim} L_{\bar{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^\bullet$$

de $D(U, (fp)^{-1}\mathcal{O}_S)$. Si maintenant E est un cristal en $\mathcal{O}_{X/S}$ -modules, la flèche d'adjonction

$$E \rightarrow Rp_* p^* E$$

est un isomorphisme par descente cohomologique (cf. par exemple [4], V 3.4.8), et, en appliquant (3.2.6.1) à $L = p^* E$, on trouve un isomorphisme canonique

$$(3.2.6.2) \quad Ru_{X/S*} E \xrightarrow{\sim} Rp_* (E_{\bar{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^\bullet).$$

Cet isomorphisme jouit de propriétés de functorialité et de compatibilité au changement de base analogues à 3.2.5. Étant donné un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & U' & \xrightarrow{i'} & Y' \\ & p' \swarrow & \downarrow & \downarrow i & \downarrow \\ X' & & U & \xrightarrow{i} & Y \\ g \downarrow & p \swarrow & & & \downarrow \\ X & & & & S \end{array}$$

où p, p' sont des hyperrecouvrements ouverts, Y, Y' des schémas simpliciaux lisses sur S , i, i' des immersions fermées, et où l'on suppose que les puissances divisées γ s'étendent aux schémas du diagramme, alors, pour toute flèche $a: E \rightarrow Rg_* E'$, où E (resp. E') est un cristal en $\mathcal{O}_{X/S}$ (resp. $\mathcal{O}_{X'/S}$)-modules, on a un carré commutatif

$$(3.2.6.3) \quad \begin{array}{ccc} Ru_{X/S*} E & \rightarrow & Rg_* Ru_{X'/S*} E' \\ (3.2.6.2) \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow (3.2.6.2) \\ Rp_* (E_{\bar{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^\bullet) & \rightarrow & Rg_* Rp'_* (E'_{\bar{Y}'} \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \Omega_{Y'/S}^\bullet) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont définies par a et le diagramme. Cette compatibilité découle immédiatement de la propriété de fonctorialité de (3.2.6.1) analogue à 3.2.5(a), relative au diagramme défini par U, U', Y, Y' . D'autre part, étant donné un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{i} & Y \\ p \downarrow & & \downarrow \\ X & & (S, I, \gamma) \\ & \searrow h & \downarrow \\ & & (S', I', \gamma') \end{array}$$

où p est un hyperrecouvrement ouvert, $Y/S, Y'/S'$ des schémas simpliciaux lisses, i, j des immersions fermées, et h un PD-morphisme, alors, pour tout cristal E en $\mathcal{O}_{X/S}$ -modules, on a un carré commutatif

$$(3.2.6.4) \quad \begin{array}{ccc} Ru_{X/S*} E & \rightarrow & Ru_{Y'/S}* E \\ (3.2.6.2) \downarrow \simeq & & \simeq \downarrow (3.2.6.2) \\ Rp_*(E_{\bar{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_{Y'}} \Omega_{Y'/S}^\bullet) & \rightarrow & Rp_*(E_{\bar{Y}} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \Omega_{Y/S}^\bullet) \end{array}$$

déduit par application de Rp_* d'un carré analogue à celui de 3.2.5(b) relatif au diagramme défini par $U, Y/S, Y'/S'$.

I. — Complexe de De Rham-Witt

La construction du complexe de De Rham-Witt, d'après Deligne [21], est exposée aux n°s 1 et 2. L'idée est la suivante. Soit X un schéma de caractéristique p (ou plus généralement un topos annelé en $\mathbb{F}_p$ -algèbres). S'inspirant du formalisme de [12], on se propose de prolonger le système projectif $W.\mathcal{O}_X$ des anneaux de vecteurs de Witt $W_n\mathcal{O}_X$ en un système projectif d'algèbres différentielles graduées $W.\Omega_X^\bullet$, et les opérateurs $F : W_n\mathcal{O}_X \rightarrow W_{n-1}\mathcal{O}_X$, $V : W_n\mathcal{O}_X \rightarrow W_{n+1}\mathcal{O}_X$ en des opérateurs $F : W_n\Omega_X^i \rightarrow W_{n-1}\Omega_X^i$, $V : W_n\Omega_X^i \rightarrow W_{n+1}\Omega_X^i$, additifs et satisfaisant au formulaire suivant :

- (1) $FV = VF = p, \quad FdV = d, \quad Fd\underline{x} = \underline{x}^{p-1} d\underline{x} \quad [x \in \mathcal{O}_X, \underline{x} = (x, 0, \dots)],$
- (2) $Fx.Fy = F(xy), \quad xVy = V(Fx.y) \quad (x, y \in W.\mathcal{O}_X),$
- (3) $V(xdy) = Vx.dVy \quad (x, y \in W.\mathcal{O}_X)$

[la relation (3), conséquence de (1) et (2) après application de F , étant là pour permettre le calcul de $V(adx_1 \dots dx_i)$ pour $a, x_1, \dots, x_i \in W.\mathcal{O}_X$]. On désire, naturellement, que ce prolongement soit canonique et fonctoriel en X , et universel en un sens convenable. La réalisation de cet objectif se fait en trois étapes. Dans un premier temps, négligeant F , on construit, comme solution d'un problème universel, un système projectif d'algèbres différentielles graduées $W.\Omega_X^\bullet$ prolongeant $W.\mathcal{O}_X$, et des prolongements additifs de V

satisfaisant à un formulaire composé de (3) et d'un cas particulier de (1) et (2), à savoir $d_X \cdot V y = V(x^{p-1} d_X \cdot y)$ pour $x \in \mathcal{O}_X$, $y \in W_* \mathcal{O}_X$. La construction est facile et, bien entendu, essentiellement unique. Il n'est pas clair toutefois, à ce stade, qu'on puisse prolonger F de manière à satisfaire aux relations (1) et (2). C'est pourtant le miracle qui se produit, et dont l'explication fait l'objet des deux autres étapes. On sait que, si $A = \mathbb{F}_p[T_1, \dots, T_n]$, on peut décrire les vecteurs de Witt sur A comme certaines séries formelles, à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$, en les puissances fractionnaires des T_i , à dénominateurs puissances de p . Les constructions de Lubkin [46] ont suggéré à Deligne de considérer, plus généralement, un certain sous-complexe E du complexe de De Rham de $\mathbb{Q}_p[T_1^{p^{-\infty}}, \dots, T_n^{p^{-\infty}}] = \bigcup \mathbb{Q}_p[T_1^{p^{-r}}, \dots, T_n^{p^{-r}}]$, le plus grand sous-complexe composé de formes à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$ (voir 2.1). La composante de degré 0 de E , convenablement complétée, s'identifie canoniquement à $W(A)$. Plus précisément, on dispose sur E d'un opérateur V (2.2) tel que $E^0/V^n E^0$ soit canoniquement isomorphe à $W_n(A)$. On a aussi $V(x dy) = Vx \cdot dVy$ pour $x, y \in E$, et l'observation cruciale de Deligne est que, si E_* est le système projectif des quotients de E par les idéaux différentiels gradués engendrés par les $V^n E^0$, E_* muni des opérateurs induits par V , s'identifie naturellement au pro-complexe universel $W_* \Omega_A^*$ construit précédemment. La deuxième étape est consacrée à la démonstration, assez technique, de ce résultat. Le problème du prolongement de F est alors résolu dans le cas particulier où X est le topos ponctuel annelé par A : en plus de V , on dispose en effet sur E d'un opérateur F , induisant des opérateurs de E_n dans E_{n-1} vérifiant, avec V , les formules (1) et (2). La dernière étape, facile, consiste à prouver l'existence du prolongement de F dans le cas général; l'unicité est immédiate. Par définition, le pro-complexe de De Rham-Witt de X est le système projectif $W_* \Omega_X^*$ ainsi construit, et le complexe de De Rham-Witt $W \Omega_X^*$ en est la limite projective. Ces objets dépendent fonctoriellement de X . En particulier, l'endomorphisme de Frobenius absolu de X induit un endomorphisme de $W \Omega_X^*$, dont on vérifie qu'il est donné par $p^i F$ en degré i : il s'agit, en un sens, d'une variante « universelle » de la situation envisagée en (0 2.3) (avec $S = \mathbb{F}_p$).

Au n° 3, on étudie la structure du complexe de De Rham-Witt des schémas X lisses sur une base parfaite S . On travaille en fait, systématiquement, avec le pro-complexe de De Rham-Witt plutôt qu'avec sa limite projective. La raison est que la formation des $W_n \Omega_X^*$ commute à la localisation étale sur X , ce qui permet de ramener certaines vérifications au cas où X est le spectre d'une algèbre de polynômes sur un anneau parfait et d'utiliser la structure du complexe des formes entières ci-dessus. Le résultat le plus important est 3.9, qui décrit le noyau de la projection $W_n \Omega_X^i \rightarrow W_{n-1} \Omega_X^i$ comme extension de Ω_X^{i-1}/Z_n par Ω_X^i/B_n , où B_n et Z_n sont les bords et cycles supérieurs du complexe de De Rham définis en (0 2.2). La similitude remarquable avec la structure locale du complexe des courbes typiques de Bloch [12], II 7.2.1, permettra, au n° 5, d'identifier ce complexe au complexe de De Rham-Witt. Par ailleurs, 3.9 sera l'ingrédient essentiel des théorèmes de finitude de (II 2). La plupart des résultats du n° 3 ont été inspirés par ceux de Bloch [12], II, qu'ils généralisent. Les plus utiles, en dehors de 3.9, sont 3.3, 3.5, 3.14 [dont on se servira, en (II 1), pour prouver que le complexe de De Rham-Witt « calcule » la cohomologie cristalline], et 3.27 (conduisant, comme dans Bloch [12], III 4.1, aux suites exactes reliant la cohomologie cristalline à la cohomologie plate à valeurs dans $\mathbb{Z}_p(1)$ (II 5.5)).

On peut se demander, pour X lisse sur une base parfaite S , de combien le complexe de De Rham-Witt $W\Omega_X^\bullet$ diffère du complexe de De Rham (complété) de $W\mathcal{O}_X$, plus précisément, quel est le noyau de la flèche canonique $\varprojlim \Omega_{W_n\mathcal{O}_X}^\bullet \rightarrow W\Omega_X^\bullet$. La réponse, donnée au n° 4, est que ce noyau est l'adhérence de la « torsion » (voir 4.6 et 4.8 pour des énoncés précis). Ce résultat fait apparaître le complexe construit par Lubkin dans [46] comme un analogue « avec conditions de croissance » du complexe de De Rham-Witt. Il ne servira pas dans la suite.

Le n° 5 est consacré au théorème de comparaison, annoncé plus haut, entre le complexe de De Rham-Witt et le complexe des courbes typiques de Bloch. Bien qu'important du point de vue théorique, ce résultat ne sera cependant pas utilisé dans le reste de ce travail.

1. PRO-COMPLEXE DE DE RHAM-WITT D'UN TOPOS ANNELÉ EN $\mathbb{F}_p$ -ALGÈBRES.

DÉFINITION 1.1. — Soit X un topos. On appelle *V-pro-complexe de DR sur X* la donnée d'un système projectif $M_\bullet = ((M_n)_{n \in \mathbb{Z}}, R : M_{n+1} \rightarrow M_n)$ de $\mathbb{Z}$ -adg de X (0 3.1.1) et d'une famille d'applications additives $(V : M_n^i \rightarrow M_{n+1}^i)_{i, n \in \mathbb{Z}}$ telles que $RV = VR$, cette donnée étant assujettie à vérifier les conditions suivantes :

(V 1) $M_n = 0$ pour $n \leq 0$, M_1^0 est une $\mathbb{F}_p$ -algèbre, et pour $n \geq 1$, $M_n^0 = W_n(M_1^0)$, et $R : W_{n+1}(M_1^0) \rightarrow W_n(M_1^0)$ [resp. $V : W_n(M_1^0) \rightarrow M_{n+1}(M_1^0)$] est la flèche habituelle de restriction (resp. décalage);

(V 2) quels que soient n, i, j , et $x \in M_n^i, y \in M_n^j$, on a

$$V(x dy) = (Vx) dVy;$$

(V 3) pour tout $n \geq 1$ et quels que soient $x \in M_1^0, y \in M_n^0$, on a

$$(Vy) d\underline{x} = V(\underline{x}^{p-1} y) dV\underline{x},$$

où $\underline{x} = (x, 0, \dots)$ désigne le représentant multiplicatif de x (0 1.1.7).

Noter que (V 2) entraîne :

(V 2') quels que soient n et $a, x_1, \dots, x_i \in M_n^0$, on a

$$V(ax_1 \dots dx_i) = (Va) dVx_1 \dots dVx_i.$$

Les conditions (V 2) et (V 2') sont équivalentes si, pour tout n , M_n est engendré, comme adg, par M_n^0 (i. e. toute section de M_n^i est localement somme de sections de la forme $ax_1 \dots dx_i$, avec $a, x_1, \dots, x_i \in M_n^0$).

Les V-pro-complexes de DR sur X forment de manière naturelle une catégorie, qu'on notera $VDR(X)$, une flèche $f : M_\bullet \rightarrow N_\bullet$ de $VDR(X)$ étant par définition un homomorphisme de systèmes projectifs d'adg $(f_n : M_n \rightarrow N_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ tel que $f_{n+1}V = Vf_n$, et $f_n^0 = W_n(f_1^0)$ pour tout $n \geq 1$. On a un foncteur d'oubli

$$(1.2) \quad VDR(X) \rightarrow \mathbb{F}_p\text{-alg}(X), \quad M_\bullet \mapsto M_1^0,$$

où $\mathbb{F}_p\text{-alg}(X)$ désigne la catégorie des $\mathbb{F}_p$ -algèbres (commutatives) de X .

THÉOREME 1.3. — *Le foncteur 1.2 admet un adjoint à gauche $A \mapsto W_*\Omega_A^\bullet$: on a un isomorphisme fonctoriel*

$$(1.3.1) \quad \text{Hom}_{\text{VDR}(X)}(W_*\Omega_A^\bullet, M_\bullet) = \text{Hom}_{\mathbb{F}_p\text{-alg}(X)}(A, M_1^0),$$

pour $A \in \text{ob } \mathbb{F}_p\text{-alg}(X)$, $M_\bullet \in \text{ob } \text{VDR}(X)$. Pour tout $n \geq 1$, l'homomorphisme de $\mathbb{Z}$ -adg $\pi_n : \Omega_{W_n(A)}^\bullet \rightarrow W_n\Omega_A^\bullet$ tel que π_n^0 soit l'identité (0.3.1.1) est surjectif, et $\pi_1 : \Omega_A^\bullet \rightarrow W_1\Omega_A^\bullet$ est un isomorphisme.

Posons $W_n\Omega_A^\bullet = 0$ si $n \leq 0$, $W_1\Omega_A^\bullet = \Omega_A^\bullet$. Supposons construit, pour $n \geq 1$ fixé, le système projectif de $\mathbb{Z}$ -adg $(R : W_i\Omega_A^\bullet \rightarrow W_{i-1}\Omega_A^\bullet) (i \leq n)$, et les applications additives $V : W_{i-1}\Omega_A^\bullet \rightarrow W_i\Omega_A^\bullet (i \leq n)$. Supposons vérifiées les conditions :

(0)_n : $RVx = VRx$ quel que soit $x \in W_i\Omega_A^\bullet$, $i \leq n-1$;

(1)_n : $W_i\Omega_A^0 = W_iA$ pour $i \leq n$, et $R : W_iA \rightarrow W_{i-1}A$ (resp. $V : W_{i-1}A \rightarrow W_iA$) est la restriction (resp. le décalage);

(2)_n : $V(xdy) = (Vx)dVy$ quels que soient $x, y \in W_i\Omega_A^\bullet$, $i \leq n-1$;

(3)_n : $(Vy)d\underline{x} = V(\underline{x}^{p-1}y)dV\underline{x}$ quels que soient $x \in A$, $y \in W_iA$, $i \leq n-1$;

(4)_n : l'homomorphisme $\pi_i : \Omega_{W_iA}^\bullet \rightarrow W_i\Omega_A^\bullet$ est surjectif pour tout $i \leq n$.

Nous allons construire $W_{n+1}\Omega_A^\bullet$, $R : W_{n+1}\Omega_A^\bullet \rightarrow W_n\Omega_A^\bullet$, $V : W_n\Omega_A^\bullet \rightarrow W_{n+1}\Omega_A^\bullet$ satisfaisant aux conditions (0)_{n+1} à (4)_{n+1}, puis nous montrerons que l'objet $W_*\Omega_A^\bullet$ construit ainsi pas à pas à partir de $n=1$ possède la propriété universelle requise.

Soient $v : W_n(A)^{\otimes i+1} \rightarrow \Omega_{W_{n+1}(A)}^i$ l'homomorphisme défini par

$$v(a \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_i) = V a d V x_1 \dots d V x_i, \quad \varepsilon : W_n(A)^{\otimes i+1} \rightarrow \Omega_{W_n(A)}^i$$

l'homomorphisme (surjectif) défini par $\varepsilon(a \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_i) = a dx_1 \dots dx_i$, et K^i le noyau de l'homomorphisme composé

$$W_n(A)^{\otimes i+1} \xrightarrow{v} \Omega_{W_n(A)}^i \xrightarrow{\pi_n} W_n\Omega_A^i.$$

La formule

$$v(a \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_i) v(b \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_j) = p v(ab \otimes x_1 \otimes \dots \otimes x_i \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_j)$$

montre que $\bigoplus_i v(K^i)$ est un idéal gradué de $\Omega_{W_{n+1}(A)}^\bullet$ (mais pas stable par d en général : on a seulement $p dv(K^i) \subset v(K^{i+1})$). Notons d'autre part I le sous- $W_{n+1}(A)$ -module de $\Omega_{W_{n+1}(A)}^1$ engendré par les sections de la forme $Vy.d\underline{x} - V(\underline{x}^{p-1}y)dV\underline{x}$ pour $x \in A$, $y \in W_n(A)$. Désignons enfin par N l'idéal différentiel gradué de $\Omega_{W_{n+1}(A)}^\bullet$ engendré par I et $\bigoplus_i v(K^i)$, et posons

$$W_{n+1}\Omega_A^\bullet = \Omega_{W_{n+1}(A)}^\bullet / N.$$

Soit $R : \Omega_{W_{n+1}(A)}^\bullet \rightarrow \Omega_{W_n(A)}^\bullet$ l'homomorphisme d'adg défini par $R : W_{n+1}(A) \rightarrow W_n(A)$. On a

$$(\star) \quad \pi_n R(N) = 0.$$

En effet, comme π_n et R sont des homomorphismes d'adg, il suffit de vérifier (a) $\pi_n R v(K^i) = 0$ pour tout i , (b) $\pi_n R(I) = 0$. Soit $x = \sum a_\alpha \otimes x_{\alpha 1} \otimes \dots \otimes x_{\alpha i} \in K^i$. On a

$$\begin{aligned} \pi_n R v(x) &= \pi_n (\sum RV a_\alpha \otimes RV x_{\alpha 1} \otimes \dots \otimes RV x_{\alpha i}) \\ &= \pi_n (\sum VR a_\alpha \otimes VR x_{\alpha 1} \otimes \dots \otimes VR x_{\alpha i}) \\ &= \sum VR a_\alpha d VR x_{\alpha 1} \dots d VR x_{\alpha i} \quad [\text{d'après (1)}_n] \\ &= VR (\sum a_\alpha dx_{\alpha 1} \dots dx_{\alpha i}) \quad [\text{d'après (2)}_n] = VR \pi_n \varepsilon(x) = 0. \end{aligned}$$

D'autre part, pour $x \in A$, $y \in W_n(A)$, on a

$$\begin{aligned} \pi_n R(V y \cdot d\underline{x} - V(\underline{x}^{p-1} y) d V \underline{x}) &= \pi_n (RV y \cdot d\underline{x} - RV(\underline{x}^{p-1} y) d RV \underline{x}) \\ &= \pi_n (VR y \cdot d\underline{x} - V(\underline{x}^{p-1} R y) d V \underline{x}) = 0 \quad \text{d'après (3)}_n. \end{aligned}$$

Donc $(\star)$ est vérifié, et par suite R définit par passage au quotient un homomorphisme d'adg $R : W_{n+1} \Omega_A^\bullet \rightarrow W_n \Omega_A^\bullet$. Par construction, on a $\pi_{n+1} v(K^i) = 0$, donc v induit une application additive $V : W_n \Omega_A^i \rightarrow W_{n+1} \Omega_A^i$, telle que $V(a dx_1 \dots dx_i) = V a d V x_1 \dots d V x_i$ quels que soient $a, x_1, \dots, x_i \in W_n(A)$. Les conditions $(0)_{n+1}$ à $(4)_{n+1}$ sont trivialement vérifiées. Il reste à montrer que le V -pro-complexe de DR $W_n \Omega_A^\bullet$ construit pas à pas par le procédé précédent possède la propriété universelle (1.3.1). Soient $M_\bullet$ un V -pro-complexe de DR et $f_1^0 : A \rightarrow M_1^0$ un homomorphisme. Soit $f_1 : \Omega_A^\bullet \rightarrow M_1$ l'homomorphisme (unique) d'adg prolongeant f_1^0 . Soit $n \geq 1$, et supposons f_1 prolongé en un homomorphisme d'adg $f_i : W_i \Omega_A^\bullet \rightarrow M_i$ pour $i \leq n$ (de manière unique car π_i est surjectif), les f_i satisfaisant à $f_{i-1} R = R f_i$, $V f_{i-1} = f_i V$, $f_i^0 = W_i(f_1^0)$ pour $1 \leq i \leq n$. Soit $g_{n+1} : \Omega_{W_{n+1}(A)}^\bullet \rightarrow M_{n+1}$ l'unique homomorphisme d'adg prolongeant $f_{n+1}^0 \stackrel{df_n}{=} W_{n+1}(f_1^0)$. On vérifie trivialement que $g_{n+1}(N) = 0$, et que l'homomorphisme d'adg $f_{n+1} : W_{n+1} \Omega_A^\bullet \rightarrow M_{n+1}$ déduit de g_{n+1} par passage au quotient est tel que $f_n R = R f_{n+1}$, $V f_n = f_{n+1} V$. Il en résulte que f_1^0 se prolonge de manière unique en un homomorphisme de VDR(X) $f_\bullet : W_\bullet \Omega_A^\bullet \rightarrow M_\bullet$, ce qui définit l'isomorphisme d'adjonction (1.3.1). Les deux dernières assertions de 1.3 découlent de la construction (on pourrait aussi les déduire directement de la propriété universelle (1.3.1)).

DÉFINITION 1.4. — Soit A une $\mathbb{F}_p$ -algèbre de X . Le V -pro-complexe de DR $W_\bullet \Omega_A^\bullet$ s'appelle pro-complexe de De Rham-Witt de A .

PROPOSITION 1.5. — Soit A une $\mathbb{F}_p$ -algèbre de X . On a :

$$(1.5.1) \quad x V y = V(FR x \cdot y) \quad \text{quels que soient } x \in W_n(A), y \in W_{n-1} \Omega_A^i, n, i \in \mathbb{Z},$$

$$(1.5.2) \quad (d\underline{x}) V y = V((\underline{x}^{p-1} d\underline{x}) y) \quad \text{quels que soient } x \in A, y \in W_{n-1} \Omega_A^i, n, i \in \mathbb{Z}.$$

Par la surjectivité de $\pi_\bullet$, on peut supposer y de la forme $y = a dx_1 \dots dx_i$, avec $a, x_1, \dots, x_i \in W_{n-1}(A)$. La formule (V 2) ramène la vérification de (1.5.1) et (1.5.2) au cas où $i = 0$: (1.5.1) est alors connu [cf. (0 1.3.6)], et (1.5.2) résulte de (V 2) et (V 3).

PROPOSITION 1.6. — Soit k une $\mathbb{F}_p$ -algèbre parfaite de X (i.e. telle que l'endomorphisme de Frobenius de k soit un automorphisme). Alors on a $W_i \Omega_A^\bullet = 0$ pour tout $i > 0$.

Compte tenu de la surjectivité de π_* , cela résulte du :

LEMME 1.7. — *Sous les hypothèses de 1.6, on a $\Omega_{W_n(k)}^i = 0$ pour tout $i > 0$ et tout $n \geq 1$.*

Il suffit de prouver que, si M est un $W_n(k)$ -module, toute dérivation $d : W_n(k) \rightarrow M$ est nulle. Or, si $x = (x_0, \dots, x_{n-1}) \in W_n(k)$, on peut écrire $x = \underline{x}_0 + V \underline{x}_1 + \dots + V^{n-1} \underline{x}_{n-1}$, donc

$$F^n x = \underline{x}_0^p + p \underline{x}_1^{p^{n-1}} + \dots + p^{n-1} \underline{x}_{n-1}^p,$$

et par suite $dF^n x$ est divisible par p^n donc nul. Comme F est un automorphisme par hypothèse, il en résulte que $d=0$.

1.8. Par définition, $W_\bullet \Omega_A^\bullet$ est un foncteur en la $\mathbb{F}_p$ -algèbre A du topos X : toute flèche $u : A \rightarrow B$ de $\mathbb{F}_p$ -algèbres définit une flèche de $VDR(X)$:

$$(1.8.1) \quad W_\bullet \Omega_u^\bullet : W_\bullet \Omega_A^\bullet \rightarrow W_\bullet \Omega_B^\bullet.$$

En particulier, si k est une $\mathbb{F}_p$ -algèbre parfaite de X , et A une k -algèbre, il résulte de 1.6 que, pour tout $n \geq 1$, $W_n \Omega_A^\bullet$ est de manière naturelle une $W_n(k)$ -adg [i.e. que $d : W_n \Omega_A^i \rightarrow W_n \Omega_A^{i+1}$ est $W_n(k)$ -linéaire]; l'opérateur $V : W_n \Omega_A^i \rightarrow W_{n+1} \Omega_A^i$ est $\sigma^{-1} - W_\bullet(k)$ -linéaire, où σ est l'automorphisme de Frobenius de $W_\bullet(k)$.

1.9. Soient $k \rightarrow k'$ un homomorphisme de $\mathbb{F}_p$ -algèbres parfaites de X , A une k -algèbre, $A' = A \otimes_k k'$. Compte tenu de 1.6, les flèches (1.8.1) définissent un morphisme de systèmes projectifs d'adg :

$$(1.9.1) \quad W_\bullet \Omega_A^\bullet \otimes_{W_\bullet(k)} W_\bullet(k') \rightarrow W_\bullet \Omega_{A'}^\bullet.$$

PROPOSITION 1.9.2. — *La flèche (1.9.1) est un isomorphisme.*

Observons d'abord que, k' étant parfait, le carré

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{F} & A' \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \xrightarrow{F} & A \end{array}$$

est cocartésien. Utilisant (0 1.3.15), on en déduit que, pour tout $n \geq 1$, la flèche canonique

$$(\star) \quad W_n(A) \otimes_{W_n(k)} W_n(k') \rightarrow W_n(A')$$

est un isomorphisme. Soit

$$V : W_n \Omega_A^i \otimes_{W_n(k)} W_n(k') \rightarrow W_{n+1} \Omega_A^i \otimes_{W_{n+1}(k)} W_{n+1}(k'),$$

l'unique homomorphisme tel que

$$V(x \otimes F R y) = V x \otimes y,$$

pour tout $x \in W_n \Omega_A^i$, $y \in W_{n+1}(k')$. Pour $i=0$, cet homomorphisme s'identifie par $(\star)$ au décalage $V : W_n(A') \rightarrow W_{n+1}(A')$. On vérifie trivialement que les isomorphismes $(\star)$ et les homomorphismes V qu'on vient de définir munissent le système projectif d'adg $W_n \Omega_A^* \otimes_{W_n(k)}$ d'une structure de V-pro-complexe de DR. Par (1.3.1), l'identité de A' se prolonge donc de manière unique en une flèche de $VDR(X)$:

$$(\star\star) \quad W_n \Omega_{A'}^* \rightarrow W_n \Omega_A^* \otimes_{W_n(k)} W_n(k').$$

On vérifie immédiatement que les flèches (1.9.1) et $(\star\star)$ sont inverses l'une de l'autre.

1.10. Pour n fixé, le foncteur $W_n(A)$ commute aux limites inductives filtrantes de $\mathbb{F}_p$ -algèbres du topos X . Il en résulte que la catégorie $VDR(X)$ possède des limites inductives filtrantes, et que, si $(A_i)_{i \in I}$ est un système inductif filtrant de $\mathbb{F}_p$ -algèbres de X , la flèche canonique

$$(1.10.1) \quad \varinjlim_{i \in I} W_n \Omega_{A_i}^* \rightarrow W_n \Omega_A^*,$$

où $A = \varinjlim A_i$, est un isomorphisme.

Pour tout objet U de X , $\Gamma(U, W_n \Omega_A^*)$ est un V-complexe de DR, d'où une flèche de V-complexes de DR :

$$(1.10.2) \quad W_n \Omega_{\Gamma(U, A)}^* \rightarrow \Gamma(U, W_n \Omega_A^*),$$

prolongeant l'identité en degré 0. Pour U variable, la flèche (1.10.2) définit un morphisme de préfaisceaux, qui, comme on le voit aussitôt, induit un isomorphisme sur les faisceaux associés.

PROPOSITION 1.11. — Soit $A \rightarrow B$ un morphisme de localisation [32], II 2.3.2, de $\mathbb{F}_p$ -algèbres de X , identifiant B à $S^{-1}A$ pour une certaine partie multiplicative S de A . Alors, pour tout $n \geq 1$ et tout i , la flèche $W_n(B)$ -linéaire :

$$(1.11.1) \quad W_n(B) \otimes_{W_n(A)} W_n \Omega_A^i \rightarrow W_n \Omega_B^i,$$

définie par (1.8.1) est un isomorphisme.

D'après (01.5.3), $W_n(A) \rightarrow W_n(B)$ est un morphisme de localisation, identifiant $W_n(B)$ à $S_n^{-1} W_n(A)$, où $S_n = \{(a_0, \dots, a_{n-1}) \in W_n(A) \mid a_0 \in S\}$. La dérivation d de $W_n \Omega_A^*$ se prolonge donc de manière unique en une dérivation d de $W_n(B) \otimes_{W_n(A)} W_n \Omega_A^* = S_n^{-1} W_n \Omega_A^*$ telle que $d(s^{-1}x) = -s^{-2}ds \cdot x + s^{-1}dx$ pour $s \in S_n$, $x \in W_n \Omega_A^i$, d'où un système projectif d'adg $S_n^{-1} W_n \Omega_A^*$. Par ailleurs, le carré

$$\begin{array}{ccc} & \overset{F}{\rightarrow} & \\ B & & B \\ \uparrow & & \uparrow \\ A & \overset{F}{\rightarrow} & A \end{array}$$

est cocartésien [car $(S^p)^{-1}A = S^{-1}A$]. Utilisant (0 1.3.15), on en déduit, comme dans la preuve de (0 1.5.8) que, pour tout $n \geq 1$, les carrés

$$\begin{array}{ccc} W_n(B) & \xrightarrow{F} & W_n(B) \\ \uparrow & & \uparrow \\ W_n(A) & \xrightarrow{F} & W_n(A) \end{array}$$

sont cocartésiens. Il existe par suite un unique homomorphisme

$$V : W_n(B) \otimes_{W_n(A)} W_n \Omega_A^i \rightarrow W_{n+1}(B) \otimes_{W_{n+1}(A)} W_{n+1} \Omega_A^i,$$

tel que $V(FR x \otimes y) = x \otimes V y$ quels que soient $x \in W_{n+1}(B)$, $y \in W_n \Omega_A^i$, et il est immédiat de vérifier que le système projectif $W_\bullet(B) \otimes_{W_\bullet(A)} W_\bullet \Omega_A^i = S^{-1} W_\bullet \Omega_A^i$, muni du V ainsi défini, est un V -pro-complexe de DR. En vertu de 1.3, l'identité de B se prolonge de manière unique en une flèche de $VDR(X)$:

$$(1.11.2) \quad W_\bullet \Omega_B^i \rightarrow W_\bullet(B) \otimes_{W_\bullet(A)} W_\bullet \Omega_A^i,$$

dont on vérifie facilement, grâce à la surjectivité de $\pi_*(1.3)$, qu'elle est inverse de (1.11.1).

1.12. Soit $(X, \mathcal{O}_X)$ un topos annelé en $\mathbb{F}_p$ -algèbres. Le pro-complexe de DR-Witt de $\mathcal{O}_X$ sera noté

$$(1.12.1) \quad W_\bullet \Omega_X^i$$

et dit *pro-complexe de DR-Witt de X* .

Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de topos annelés en $\mathbb{F}_p$ -algèbres. Alors $f_* W_\bullet \Omega_X^i$ et $f^{-1} W_\bullet \Omega_Y^i$ sont de manière naturelle des V -pro-complexes de DR, et l'on a des flèches canoniques (de V -pro-complexes de DR), adjointes l'une de l'autre :

$$(1.12.2) \quad W_\bullet \Omega_Y^i \rightarrow f_* W_\bullet \Omega_X^i,$$

$$(1.12.3) \quad f^{-1} W_\bullet \Omega_Y^i \rightarrow W_\bullet \Omega_X^i.$$

Si $\mathcal{O}_X = f^{-1} \mathcal{O}_Y$, (1.12.3) est un isomorphisme. En particulier, si x est un point de X , on a

$$(1.12.4) \quad (W_\bullet \Omega_X^i)_x \xrightarrow{\sim} W_\bullet \Omega_{X,x}^i.$$

1.13. Soit X un $\mathbb{F}_p$ -schéma. Rappelons (0 1.5) que, pour tout $n \geq 1$, l'espace annelé $(X, W_n(\mathcal{O}_X))$ est un schéma $W_n(X)$, extension infinitésimale de X .

PROPOSITION 1.13.1. — *Pour tout $n \geq 1$ et tout i , $W_n \Omega_X^i$ est un faisceau quasi cohérent sur $W_n(X)$. Pour tout ouvert affine $U = \text{Spec}(A)$ de X , on a $\Gamma(U, W_n \Omega_X^i) = W_n \Omega_A^i$.*

On peut supposer X affine, d'anneau A , de sorte que $W_n(X)$ est affine, d'anneau $W_n(A)$. Si A_X désigne le faisceau d'anneaux constant de valeur A sur X , la flèche canonique $A_X \rightarrow \mathcal{O}_X$ est un morphisme de localisation, et d'après (1.11.2), la flèche donnée par fonctorialité

$$W_n \mathcal{O}_X \otimes_{W_n A_X} (W_n \Omega_A^i)_X \rightarrow W_n \Omega_X^i$$

est un isomorphisme, en d'autres termes $W_n \Omega_X^i$ est le faisceau quasi cohérent associé au $W_n(A)$ -module $W_n \Omega_A^i$, d'où la proposition.

PROPOSITION 1.14. — Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme étale de $\mathbb{F}_p$ -schémas. Alors, pour tout n et tout i , la flèche $W_n(\mathcal{O}_X)$ -linéaire :

$$(1.14.1) \quad f^* W_n \Omega_Y^i \rightarrow W_n \Omega_X^i,$$

définie par (1.12.3) est un isomorphisme.

On peut supposer X et Y affines, d'anneaux respectifs B et A . Compte tenu de 1.13.1, il s'agit de prouver que la flèche

$$(\star) \quad W_n(B) \otimes_{W_n(A)} W_n \Omega_A^i \rightarrow W_n \Omega_B^i$$

définie par fonctorialité de $W_n \Omega^i$ est un isomorphisme. Comme $W_n(B)$ est étale sur $W_n(A)$ (0 1.5.8), la dérivation d de $W_n \Omega_A^i$ se prolonge de manière unique en une dérivation d de l'algèbre graduée $W_n(B) \otimes_{W_n(A)} W_n \Omega_A^i$ telle que $d(b \otimes x) = (db) \otimes x + b \otimes dx$ pour $b \in W_n(B)$, $x \in W_n \Omega_A^i$, db désignant l'image de b par le composé

$$W_n(B) \xrightarrow{d} \Omega_{W_n(B)}^1 = W_n(B) \otimes_{W_n(A)} \Omega_{W_n(A)}^1 \xrightarrow{1 \otimes \pi_1} W_n(B) \otimes_{W_n(A)} W_n \Omega_A^1.$$

On obtient ainsi un système projectif d'adg $W_n(B) \otimes_{W_n(A)} W_n \Omega_A^i$. D'autre part, le carré

$$\begin{array}{ccc} W_n(B) & \xrightarrow{F} & W_n(B) \\ \uparrow & & \uparrow \\ W_n(A) & \xrightarrow{F} & W_n(A) \end{array}$$

étant cocartésien (0 1.5.8), il existe un unique homomorphisme

$$V : W_n(B) \otimes_{W_n(A)} W_n \Omega_A^i \rightarrow W_{n+1}(B) \otimes_{W_{n+1}(A)} W_{n+1} \Omega_A^i,$$

tel que $V(FR x \otimes y) = x \otimes V y$ pour $x \in W_{n+1}(B)$, $y \in W_n \Omega_A^i$. On vérifie trivialement que $(W_n(B) \otimes_{W_n(A)} W_n \Omega_A^i, V)$ est un V -pro-complexe de DR. En vertu de 1.3, l'identité de B se

prolonge de manière unique en un homomorphisme de V-pro-complexes de DR :

$$(\star\star) \quad W_\bullet \Omega_B^\bullet \rightarrow W_\bullet(B) \otimes_{W_\bullet(A)} W_\bullet \Omega_A^\bullet.$$

Grâce à la surjectivité de $\pi_\bullet$ (1.3), on voit que les flèches $(\star)$ et $(\star\star)$ sont inverses l'une de l'autre, ce qui démontre la proposition.

1.15. Soit X un topos annelé en $\mathbb{F}_p$ -algèbres. Le complexe

$$(1.15.1) \quad W \Omega_X^\bullet \stackrel{\text{dfn}}{=} \varprojlim_n W_n \Omega_X^\bullet$$

s'appellera *complexe de DR-Witt* de X, C'est une algèbre différentielle graduée, dont la composante de degré 0 est $W(\mathcal{O}_X)$.

Les applications $V : W_n \Omega_X^\bullet \rightarrow W_{n+1} \Omega_X^\bullet$ définissent par passage à la limite un endomorphisme additif V de $W \Omega_X^\bullet$ tel que :

$$(1.15.2) \quad x V y = V(F x \cdot y) \quad \text{quels que soient } x \in W \mathcal{O}_X, y \in W \Omega_X^i,$$

$$(1.15.3) \quad V(xdy) = V x \cdot dV y \quad \text{quels que soient } x \in W \Omega_X^i, y \in W \Omega_X^j,$$

$$(1.15.4) \quad d_X \cdot V y = V(X^{p-1} d_X \cdot y) \quad \text{quels que soient } x \in \mathcal{O}_X, y \in W \Omega_X^i.$$

Ces formules résultent en effet immédiatement de (V2) et 1.5.

D'après 1.3, les flèches de transition $R : W_{n+1} \Omega_X^\bullet \rightarrow W_n \Omega_X^\bullet$ sont surjectives, Compte tenu de 1.13.1, il s'ensuit que, si X est un schéma, alors pour tout n la flèche canonique

$$(1.15.5) \quad W \Omega_X^\bullet \rightarrow W_n \Omega_X^\bullet$$

est surjective. Nous déterminerons plus loin (3.31) le noyau de (1.15.5) quand X est lisse sur une base parfaite.

2. CALCUL DE $W_\bullet \Omega_X^\bullet$ POUR $X = (\mathbb{G}_a^r \times \mathbb{G}_m^s)_{\mathbb{F}_p}$. L'OPÉRATEUR F.

A. Formes entières.

2.1. Soient n un entier ≥ 1 et P une partie de l'intervalle $[1, n]$ de $\mathbb{N}$. Posons

$$(2.1.1) \quad A = \mathbb{F}_p[(T_i)_{1 \leq i \leq n}, (T_i^{-1})_{i \in P}]$$

[donc $\text{Spec}(A) = (\mathbb{G}_a^r \times \mathbb{G}_m^s)_{\mathbb{F}_p}$, où $r = n - \text{card}(P)$, $s = \text{card}(P)$]. L'objet principal du n° 2 est la détermination explicite de $W_\bullet \Omega_A^\bullet$. Les cas qui nous seront les plus utiles sont $P = \emptyset$ [i.e. $\text{Spec}(A) = \mathbb{G}_a^n$], et $P = [1, n]$ [i.e. $\text{Spec}(A) = \mathbb{G}_m^n$] (qui servira seulement au n° 5).

Introduisons les anneaux

$$(2.1.2) \quad \begin{cases} B = \mathbb{Z}_p[(T_i)_{1 \leq i \leq n}, (T_i^{-1})_{i \in P}], \\ C = \varprojlim_{r \geq 0} \mathbb{Q}_p[(T_i^{p^{-r}})_{1 \leq i \leq n}, (T_i^{-p^{-r}})_{i \in P}], \end{cases}$$

la limite étant prise suivant les inclusions évidentes. Soit m un entier tel que $0 \leq m \leq n$. La formule

$$d(T_i^{p^{-r}}) = p^{-r} T_i^{p^{-r}} dT_i / T_i$$

montre que toute forme $x \in \Omega_C^m (= \Omega_{C/\mathbb{Q}_p}^m)$ s'écrit de manière unique

$$x = \sum_{i_1 < \dots < i_m} a_{i_1 \dots i_m}(T) d \log T_{i_1} \dots d \log T_{i_m},$$

où $a_{i_1 \dots i_m}(T) \in \mathbb{C}$ est un polynôme, à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$, en les $T_i^{p^{-r}}$ ($1 \leq i \leq n$) et $T_i^{-p^{-r}}$ ($i \in P$), $r \geq 0$, divisible par $\prod_{i_j \notin P} T_{i_j}^{p^{-s}}$ pour un $s \geq 0$ (avec la notation $d \log t = dt/t$ pour t inversible).

Nous dirons que les $a_{i_1 \dots i_m}(T)$ sont les *coordonnées* de x et que x est *entière* si ses coordonnées sont à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$. Nous poserons

$$(2.1.3) \quad E_A^m = \{x \in \Omega_C^m \mid x \text{ entière et } dx \text{ entière}\}.$$

Quand il n'y aura pas de confusion à craindre, nous écrirons simplement E^m au lieu de E_A^m . Les E^m forment un sous-complexe E de $\Omega_C^\bullet$, le plus grand sous-complexe constitué de formes entières. Il est clair que E est une sous-algèbre différentielle graduée de $\Omega_C^\bullet$, contenant $\Omega_B^\bullet$.

2.2. Soit F l'automorphisme de la $\mathbb{Q}_p$ -algèbre C défini par

$$F(T_i^{p^{-r}}) = T_i^{p^{-r+1}}$$

et soit V l'endomorphisme de C défini par $V = pF^{-1}$. Notons encore F l'automorphisme de l'algèbre graduée $\Omega_C^\bullet$ défini par F sur les coordonnées, et posons $V = pF^{-1}$: en d'autres termes, pour

$$x = \sum a_{i_1 \dots i_m} d \log T_{i_1} \dots d \log T_{i_m},$$

on a

$$Fx = \sum (F a_{i_1 \dots i_m}) d \log T_{i_1} \dots d \log T_{i_m},$$

$$Vx = \sum (V a_{i_1 \dots i_m}) d \log T_{i_1} \dots d \log T_{i_m}.$$

On vérifie trivialement les formules

$$(2.2.1) \quad dF = pF d, \quad Vd = p dV.$$

Il en résulte notamment que E est stable par F et V . On vérifie par ailleurs (par exemple en appliquant F aux deux membres) qu'on a

$$(2.2.2) \quad xVy = V(Fx, y),$$

$$(2.2.3) \quad V(xdy) = Vx \cdot dVy,$$

quels que soient $x, y \in \Omega_C^\bullet$.

PROPOSITION 2.3. — (a) E^0 est l'ensemble des $\sum a_k T^k \in C$ tels que $a_k \in \mathbb{Z}_p$ pour tout k , et dénominateur $(k_i) \mid a_k$ pour tout i .

(b) On a :

$$(i) \quad E^0 = \sum_{n \geq 0} V^n B;$$

$$(ii) \quad \bigcap_{n \geq 0} V^n E^0 = 0;$$

$$(iii) \quad B \cap V^n E^0 = p^n B.$$

(c) L'homomorphisme de $\mathbb{Z}_p$ -algèbres $B \rightarrow W(A)$ envoyant T_i sur le représentant multiplicatif $\underline{T}_i$ se prolonge de manière unique en un homomorphisme de $\mathbb{Z}_p$ -algèbres :

$$(2.3.1) \quad \tau : E^0 \rightarrow W(A),$$

tel que $\tau V = V \tau$. l'homomorphisme τ est injectif et induit pour tout $r \geq 1$, un isomorphisme

$$(2.3.2) \quad E^0 / V^r E^0 \xrightarrow{\sim} W(A) / V^r W(A) = W_r(A).$$

L'assertion (a) résulte aussitôt des définitions. Si $x = a T^k \in E^0$, et p^s ($s \geq 0$) est le plus grand des dénominateurs des k_i , p^s divise a , donc $a T^k = V^s y$, avec $y = p^{-s} a T^{p^k} \in B$, d'où (b) (i). Dire que $x = \sum a_k T^k \in V^n E^0$ entraîne que p^n divise a_k pour tout k , d'où (b) (ii) et (b) (iii). L'unicité de (2.3.1) découle de (b) (i). Pour l'existence, posons

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \varinjlim_{r \geq 0} \mathbb{F}_p [(T_i^{p^{-r}})_{1 \leq i \leq n}, (T_i^{-p^{-r}})_{i \in \mathbb{P}}], \\ \bar{B} &= \varinjlim_{r \geq 0} \mathbb{Z}_p [(T_i^{p^{-r}})_{1 \leq i \leq n}, (T_i^{-p^{-r}})_{i \in \mathbb{P}}], \end{aligned}$$

limites prises suivant les inclusions évidentes. On a $E^0 \subset \bar{B}$, et l'endomorphisme F de $\bar{B}$ donné par $T_i^{p^{-r}} \mapsto T_i^{p^{-r+1}}$ est un automorphisme. Par ailleurs, $\bar{A}$ est parfait, donc l'endomorphisme F de $W(\bar{A})$ est aussi un automorphisme. L'homomorphisme de $\mathbb{Z}_p$ -algèbres $\bar{B} \rightarrow W(\bar{A})$ envoyant $T_i^{p^{-r}}$ sur $\underline{T}_i^{p^{-r}}$ est compatible à F , donc à $V = p F^{-1}$, et induit l'homomorphisme τ désiré. Pour tout $r \geq 0$, V^r induit un homomorphisme A -linéaire $F_*^r A \xrightarrow{(1)} V^r E^0 / V^{r+1} E^0$ et un isomorphisme A -linéaire (01.3.14) $F_*^r A \xrightarrow{(2)} V^r W(A) / V^{r+1} W(A)$, et l'on a un triangle commutatif

$$\begin{array}{ccc} & F_*^r A & \\ (1) \swarrow & & \searrow (2) \\ V^r E^0 / V^{r+1} E^0 & \xrightarrow{\text{gr}_V} & V^r W(A) / V^{r+1} W(A). \end{array}$$

Prouver que (2.3.2) est un isomorphisme revient à prouver que gr_V est un isomorphisme, i.e. que (1) est un isomorphisme. Comme l'endomorphisme V de E^0 est injectif, on peut se borner à $r=0$, i.e. à prouver que l'inclusion $B \subset E^0$ induit un isomorphisme

$B/pB \xrightarrow{\sim} E^0/VE^0$: cela résulte de (b) (i) et (b) (iii) pour $n=1$. Par passage à la limite, (2.3.2) fournit un isomorphisme

$$(2.3.3) \quad \varprojlim E^0/V^r E^0 \xrightarrow{\sim} W(A),$$

dont le composé avec l'application canonique $E^0 \rightarrow \varprojlim E^0/V^r E^0$ est l'homomorphisme τ . Compte tenu de (b) (ii), τ est donc injectif, ce qui achève la démonstration.

B. *Énoncé du théorème principal.*

2.4. Pour tout $r \geq 0$ et tout i , posons

$$(2.4.1) \quad \text{Fil}^r E^i = V^r E^i + dV^r E^{i-1}.$$

Les formules (2.2.1) à (2.2.3) entraînent que, pour r fixé, les $\text{Fil}^r E^i$ forment un idéal différentiel gradué $\text{Fil}^r E$ de E . On a

$$\text{Fil}^0 E = E \supset \text{Fil}^1 E \supset \dots \supset \text{Fil}^r E \supset \text{Fil}^{r+1} E \supset \dots,$$

d'où un système projectif d'algèbres différentielles graduées

$$(2.4.2) \quad E_r = E/\text{Fil}^r E.$$

D'après (2.2.1), on a $V(\text{Fil}^r E) \subset \text{Fil}^{r+1} E$, $F(\text{Fil}^{r+1} E) \subset \text{Fil}^r E$, donc V (resp. F) induit un homomorphisme additif (resp. d'algèbres graduées) :

$$(2.4.3) \quad V : E_r \rightarrow E_{r+1} \quad (\text{resp. } F : E_{r+1} \rightarrow E_r),$$

vérifiant les formules déduites de (2.2.1) à (2.2.3) :

$$(2.4.4) \quad \left\{ \begin{array}{ll} dF = p F d, & V d = p d V, \\ x V y = V(F x \cdot y) & (x \in E_{r+1}, y \in E_r), \\ V(x dy) = V x \cdot dV y & (x, y \in E_r). \end{array} \right.$$

THÉORÈME 2.5. — (a) *Le système projectif $E_\bullet$, muni des opérateurs V (2.4.3), et des identifications de E_r^0 à $W_r(A)$ pour $r \geq 1$ données par (2.3.2), est un V -pro-complexe de DR.*

(b) *La flèche de V -pro-complexes de DR :*

$$(2.5.1) \quad W_\bullet \Omega_A^\bullet \rightarrow E_\bullet.$$

prolongeant la flèche identique de A (1.3) est un isomorphisme.

La démonstration nécessite des préliminaires sur la structure de E .

C. *Graduation et bases canoniques.*

2.6. L'anneau C possède une graduation naturelle de type G , où

$$(2.6.1) \quad G = \{k \in \mathbb{Z}[1/p]^n \mid k_i \geq 0 \text{ pour tout } i \notin P\}.$$

On prolonge cette graduation en une graduation (de type G) de $\Omega_C^\bullet$ en convenant qu'une forme $x \in \Omega_C^m$ est homogène de degré $k \in G$ si ses coordonnées (2.1) le sont. Pour cette graduation, la différentielle d est homogène de degré 0, et $E \subset \Omega^\bullet$ est un sous-complexe gradué. Pour $k \in G$, nous noterons

$$(2.6.2) \quad {}_k\Omega_C^\bullet$$

la composante homogène de degré k de $\Omega_C^\bullet$, et ${}_kE = E \cap {}_k\Omega_C^\bullet$. L'opérateur F (resp. V) multiplie (resp. divise) par p les degrés des composantes homogènes de toute forme $x \in \Omega_C^\bullet$.

Notons que, si $x \in \Omega_C^m$ a pour coordonnées $a_{i_1 \dots i_m}$, la condition de divisibilité indiquée en 2.1 s'exprime par le fait que, pour toute composante homogène non nulle de degré k de $a_{i_1 \dots i_m}$, on a $k_{i_j} > 0$ pour tout $i_j \notin P$.

2.7. Soit $k \in G$ tel que $v_p(k_1) \leq \dots \leq v_p(k_n)$, où v_p désigne la valuation p -adique [on convient que $v_p(0) = +\infty$]. Notons qu'alors, si k_1 est entier, k_i est entier pour tout i , et que, si $k_r = 0$ pour un r , alors $k_i = 0$ pour tout $i \geq r$. On posera pour abréger $v_p(k_i) = v_i$ [ou $v(i)$].

Soit m un entier ≥ 1 . Désignons par I_m l'ensemble des suites d'entiers $\underline{i} = (i_1, \dots, i_m)$ telles que $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$ et $k_{i_j} > 0$ pour tout j tel que $i_j \notin P$. Pour $\underline{i} \in I_m$, posons

$$t_0 = \begin{cases} 1 & \text{si } i_i = 1, \\ p^{-v_1} T_{[1, i_1]}^k & \text{si } i_i > 1 \text{ et } k_1 \notin \mathbb{Z}, \\ T_{[1, i_1]}^k & \text{si } i_1 > 1 \text{ et } k_1 \in \mathbb{Z}, \end{cases}$$

et, pour $s \geq 1$:

$$t_s = p^{-v(i_s)} T_{[i_s, i_{s+1}]}^k,$$

où $T_S^k = \prod_{i \in S} T_i^{k_i}$ si $S \subset [1, n]$, et $[i_m, i_{m+1}[= [i_m, n]$. Notons

$$(2.7.1) \quad e_{\underline{i}}(k) \in {}_k\Omega_C^m,$$

l'élément défini par

$$e_{\underline{i}}(k) = t_0 \prod_{\substack{s \geq 1 \\ k_s \neq 0}} dt_s \prod_{\substack{s \geq 1 \\ k_s = 0}} d \log T_{i_s}.$$

Notons d'autre part

$$(2.7.2) \quad \tilde{e}_0(k) \notin {}_kC,$$

l'élément défini par

$$e_0(k) = \begin{cases} p^{-v_1} T^k & \text{si } k_1 \notin \mathbb{Z}, \\ T^k & \text{si } k_1 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

PROPOSITION 2.8. — Soit $k \in G$ vérifiant l'hypothèse de 2.7. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, le $\mathbb{Z}_p$ -module ${}_k E^m$ est libre de type fini. L'élément $e_0(k)$ est une base de ${}_k E^0$, et, pour $m \geq 1$, les éléments $e_{\underline{i}}(k)$, pour $\underline{i} \in I_m$, forment une base de ${}_k E^m$.

Le fait que $e_0(k)$ soit une base de ${}_k E^0$ résulte de 2.3(a). Supposons $m \geq 1$. D'après 2.3(a), on a $t_0 \in E^0$ et $t_s \in E^0$ pour tout $s \geq 1$ tel que $v(i_s) < 0$. Pour $s \geq 1$ tel que $0 \leq v(i_s) < +\infty$, on peut écrire :

$$t_s = p^{-v(i_s)} F^{v(i_s)} (T_{[i_s, i_{s+1}[}^{p^{-v(i_s)} k}),$$

où les $p^{-v(i_s)} k_i$ sont entiers pour $i_s \leq i < i_{s+1}$ (puisque v_i croît avec i), et la formule $dF = pF d$ (2.2.1) entraîne que $dt_s \in E^1$. Donc $e_{\underline{i}}(k) \in {}_k E^m$. Munissons I_m de l'ordre lexicographique. Pour $\underline{i} \in I_m$, on a, dans Ω_C^m :

$$(\star) \quad e_{\underline{i}}(k) = T^k (ad \log T_{\underline{i}} + \sum_{\underline{j} > \underline{i}} b_{\underline{j}} d \log T_{\underline{j}}),$$

où $v_p(a) = -v_1$ si $1 < i_1$ et $k_1 \notin \mathbb{Z}$, 0 sinon (avec la notation $d \log T_{\underline{i}} = d \log T_{i_1} \dots d \log T_{i_n}$, etc.). En particulier, les $e_{\underline{i}}(k)$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}_p$. Il reste à voir qu'ils engendrent ${}_k E^m$ comme $\mathbb{Z}_p$ -module. Soit

$$x = T^k (x_{\underline{h}} d \log T_{\underline{j}} + \sum_{\underline{i} > \underline{h}} x_{\underline{i}} d \log T_{\underline{i}}) \in {}_k E^m.$$

(a) Si $h_1 = 1$, ou si $1 < h_1$ et $k_1 \in \mathbb{Z}$, on a, d'après $(\star)$:

$$x = \varepsilon x_{\underline{h}} e_{\underline{h}} + T^k (\sum_{\underline{i} > \underline{h}} y_{\underline{i}} d \log T_{\underline{i}}),$$

où ε est une unité.

(b) Si $1 < h_1$ et $k_1 \notin \mathbb{Z}$, alors

$$dx = T^k (k_1 x_{\underline{h}} d \log T_{(1, \underline{h})} + \sum_{\substack{\underline{i} \in I_{m+1} \\ \underline{i} > (1, \underline{h})}} y_{\underline{i}} d \log T_{\underline{i}}),$$

donc $x_{\underline{h}}$ est divisible par p^{-v_1} , et $(\star)$ entraîne que

$$x = w e_{\underline{h}} + T^k (\sum_{\underline{i} > \underline{h}} z_{\underline{i}} d \log T_{\underline{i}}),$$

avec $w \in \mathbb{Z}_p$.

Par récurrence descendante sur $\underline{h}$, on en déduit que x est combinaison linéaire des $e_{\underline{i}}$ à coefficients dans $\mathbb{Z}_p$, ce qui achève la démonstration.

2.9. Si $k \in G$ ne vérifie plus nécessairement l'hypothèse de 2.7, il est encore vrai que, pour tout $m \geq 0$, ${}_k E^m$ est libre de type fini sur $\mathbb{Z}_p$. Plus précisément, pour chaque $k \in G$ choisissons une permutation σ_k de $(1, \dots, n)$ telle que, si $k' = (k_{\sigma_k(i)})_{1 \leq i \leq n}$, on ait $v_p(k'_1) \leq \dots \leq v_p(k'_n)$, et

de telle manière que $\sigma_k = \text{Id}$ si $v_p(k_1) \leq \dots \leq v_p(k_n)$. Pour $k \in G$ donné, posons $P' = \sigma_k(P)$, et, pour $m \geq 1$, notons I_m l'ensemble des suites d'entiers $\underline{i} = (i_1, \dots, i_m)$ telles que $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$ et $k'_{i_j} > 0$ pour tout j tel que $i_j \notin P'$; notons T' la suite d'indéterminées $(T_{\sigma_k(1)}, \dots, T_{\sigma_k(n)})$, et posons

$$(2.9.1) \quad \begin{cases} e_0(k) = e_0(k')(T'), \\ e_{\underline{i}}(k) = e_{\underline{i}}(k')(T') \quad (\underline{i} \in I_m, m \geq 1). \end{cases}$$

Cette définition prolonge celle donnée en (2.7.1), (2.7.2). Il est clair que $e_0(k)$ est une base de ${}_k E^0$, et que, pour $m \geq 1$, les $e_{\underline{i}}(k)$, pour $\underline{i} \in I_m$, forment une base de ${}_k E^m$.

PROPOSITION 2.10. — *E est engendré, comme $\mathbb{Z}_p$ -adg, par E^0 (i.e. l'homomorphisme de $\mathbb{Z}_p$ -adg $\Omega_{E^0/\mathbb{Z}_p}^\bullet \rightarrow E$ prolongeant l'identité de E^0 est surjectif), et, pour tout $r \geq 1$, $\text{Fil}^r E$ (2.4.1) est l'idéal différentiel gradué de E engendré par $V^r E^0$.*

La première assertion résulte aussitôt de 2.8, 2.9. Notons $\text{Fil}^r E$ l'idéal différentiel gradué de E engendré par $V^r E^0$. On a $\text{Fil}^r E^0 = \text{Fil}^r E^0 = V^r E^0$, donc $\text{Fil}^r E \supset \text{Fil}^r E$. Compte tenu de (2.2.3), l'inclusion opposée découle de ce que E^0 engendre E comme $\mathbb{Z}_p$ -adg.

On notera que $\text{Fil}^r E$ est un idéal G-gradué de E, i.e. :

$$(2.10.1) \quad \text{Fil}^r E = \bigoplus_{k \in G} {}_k \text{Fil}^r E,$$

où

$${}_k \text{Fil}^r E = \text{Fil}^r E \cap {}_k E.$$

PROPOSITION 2.11. — *Soient $k \in G$, et $k' = (k'_{\sigma_k(i)})_{1 \leq i \leq n}$ avec les notations de 2.9. Posons $v'_i = v_p(k'_i)$. Notons I_0 l'ensemble réduit à la famille vide d'éléments de $[1, n]$, et $e_\emptyset(k) = e_0(k)$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $\underline{i} \in I_m$, on a :*

(a) Si $1 < i_1$ ou $m = 0$:

$$de_{\underline{i}}(k) = \begin{cases} p^{v'_1} e_{(1, \underline{i})}(k) & \text{si } k'_1 \in \mathbb{Z}, \\ e_{(1, \underline{i})}(k) & \text{si } k'_1 \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Si $i_1 = 1$, $de_{\underline{i}}(k) = 0$.

(b) Si $1 < i_1$ ou $m = 0$:

$$V e_{\underline{i}}(k) = \begin{cases} p e_{\underline{i}}(k/p) & \text{si } k'_1/p \in \mathbb{Z}, \\ e_{\underline{i}}(k/p) & \text{si } k'_1/p \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Si $i_1 = 1$, $V e_{\underline{i}}(k) = p e_{\underline{i}}(k/p)$.

(c) Si $1 < i_1$ ou $m = 0$:

$$F e_{\underline{i}}(k) = \begin{cases} e_{\underline{i}}(pk) & \text{si } k'_1 \in \mathbb{Z}, \\ p e_{\underline{i}}(pk) & \text{si } k'_1 \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Si $i_1 = 1$, $F e_{\underline{i}}(k) = e_{\underline{i}}(pk)$.

Pour la vérification, on peut se borner au cas où $v_p(k_1) \leq \dots \leq v_p(k_n)$, et les formules à prouver découlent facilement des définitions données en (2.7.1), (2.7.2). Les détails sont laissés au lecteur. Les formules (b) et (c) sont bien entendu équivalentes.

PROPOSITION 2.12. — Soient $r \in \mathbb{N}$, $k \in G$, posons

$$s = s(k) = - \inf_{1 \leq i \leq n} v_p(k_i),$$

$$v(r, k) = \begin{cases} r-s & \text{si } s > 0, \quad r \geq s, \\ 0 & \text{si } s > 0, \quad r < s, \\ r & \text{si } s \leq 0. \end{cases}$$

Avec la notation (2.10.1), on a

$${}_k \text{Fil}^r E = p^{v(r, k)}({}_k E).$$

Tout d'abord, si $s > 0$, il découle de 2.11 que, pour $\underline{i} \in I_m$, $m \in \mathbb{N}$, on a

$$(1) \quad e_{\underline{i}}(k) = \begin{cases} V^s e_{\underline{i}}(p^s k) & \text{si } 1 < i_1 \text{ ou } m=0, \\ dV^s e_{\underline{j}}(p^s k) & \text{si } i_1=1 \text{ et } \underline{i}=(1, \underline{j}). \end{cases}$$

Par suite, on a $p^{v(r, k)}({}_k E) \subset {}_k \text{Fil}^r E$, et $p^{v(r, k)}({}_k E^0) = {}_k \text{Fil}^r E^0 = {}_k (V^r E^0)$. Compte tenu de 2.10, il suffit donc de prouver que $\bigoplus_{k \in G} p^{v(r, k)}({}_k E)$ est un idéal différentiel gradué de E , et pour cela il suffit de vérifier que, si $x \in {}_a E$, $y \in {}_b E$ sont des éléments de base, on a

$$(2) \quad p^{v(r, a)} xy \in p^{v(r, a+b)}({}_{a+b} E).$$

Si $s(a) \leq 0$ et $s(b) \leq 0$, ou si $s(a) > 0$ et $s(b) \leq 0$ [auquel cas $s(a+b) = s(a)$], (2) est trivialement satisfait, donc on peut supposer $s(a) > 0$ et $s(b) > 0$. Si $s(a) > s(b)$, on a $s(a+b) = s(a)$, et (2) est encore trivialement vrai. Si $s(a) < s(b)$, on a $s(a+b) = s(b)$; pour $r < s(b)$, $v(r, a+b) = 0$, et pour $r \geq s(b)$, $v(r, a+b) = r - s(b) < r - s(a)$, donc (2) est satisfait. On peut donc supposer $s(a) = s(b) = s > 0$. D'après (1), xy est alors de l'une des formes suivantes : $V^s x' \cdot V^s y'$, $V^s x' \cdot dV^s y'$, $dV^s x' \cdot V^s y'$, $dV^s x' \cdot dV^s y'$, où $x' \in {}_a E$, $y' \in {}_b E$ sont des éléments de base, avec $a = p^{-s} \alpha$, $b = p^{-s} \beta$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^n$. Comme $dV^s x' \cdot dV^s y' = d(V^s x' \cdot dV^s y')$, on peut se borner au cas où xy est de l'une des trois premières formes. D'après (2.4.4), on a alors $xy = V^s z$, avec $z \in {}_{\alpha+\beta} E$. Posons $s(a+b) = t$. On a $t \leq s$. Si $t \leq 0$, i.e. $a+b \in \mathbb{Z}^n$, on a $\alpha + \beta \in p^s \mathbb{Z}^n$, donc

$$F^{-s} z \in {}_{a+b} E, \quad \text{et} \quad xy = V^s z = p^s F^{-s} z \in p^s({}_{a+b} E),$$

d'où $p^{v(r, a)} xy = xy \in p^r({}_{a+b} E)$ si $r < s$, et $p^{v(r, a)} xy \in p^{r-s} \cdot p^s({}_{a+b} E) = p^r({}_{a+b} E)$ si $r \geq s$, d'où (2) dans ce cas. Supposons maintenant $0 < t \leq s$, on a $\alpha + \beta \in p^{s-t} \mathbb{Z}^n$, donc $F^{-(s-t)} z \in {}_{\gamma} E$, où $a+b = p^{-t} \gamma$, donc $xy = V^s z = V^t V^{s-t} z = V^t (p^{s-t} F^{-(s-t)} z) \in p^{s-t}({}_{a+b} E)$; si $r < t$, on a $v(r, a) = v(r, a+b) = 0$, et (2) est tautologique; si $t \leq r < s$, on a $v(r, a) = 0$, $v(r, a+b) = p^{r-t}$, et $p^{s-t}({}_{a+b} E) \subset p^{r-t}({}_{a+b} E)$, d'où (2); enfin, si $s \leq r$, $v(r, a) = p^{r-s}$, $v(r, a+b) = p^{r-t}$, et $p^{v(r, a)} xy \in p^{r-s} \cdot p^{s-t}({}_{a+b} E) = p^{r-t}({}_{a+b} E)$, de sorte que (2) est vérifié dans tous les cas. La proposition est donc démontrée.

COROLLAIRE 2.13. — La multiplication par p dans E induit, pour tout $r \geq 0$, un homomorphisme injectif $p : E_r \rightarrow E_{r+1}$ [avec la notation de (2.4.2)]. Les composantes du complexe

$$(2.13.1) \quad E^\wedge \stackrel{\text{dfn}}{=} \varprojlim_r E_r$$

sont sans p -torsion, et l'application canonique $E \rightarrow E^\wedge$ est injective.

L'idéal $\text{Fil}^r E$ étant G -gradué (2.10.1), on a

$$(2.13.2) \quad E_r = \bigoplus_{k \in G} {}_k E_r,$$

où ${}_k E_r = {}_k E / {}_k \text{Fil}^r E$. Il résulte facilement de 2.12 que, pour $k \in G$ donné, la multiplication par p dans E induit un homomorphisme injectif ${}_k E_r \rightarrow {}_k E_{r+1}$, d'où la première assertion. La seconde en découle. D'après 2.12, on a, pour tout $k \in G$, $\bigcap_{r \geq 0} {}_k \text{Fil}^r E = 0$, donc l'application canonique $E \rightarrow E^\wedge$ est injective, ce qui achève la démonstration.

D. Démonstration de 2.5 et corollaires.

2.14. Prouvons d'abord 2.5 (a). Compte tenu de (2.4.4), le seul point qui reste à vérifier est $V3$, et pour cela, il suffit d'établir que, pour tout $x \in A$, si $\underline{x} \in W(A)$ est le représentant multiplicatif de x , et $\underline{x}_{\leq n}$ l'image de $\underline{x}$ dans $W_n(A)$, on a, pour tout $n \geq 1$;

$$(2.14.1) \quad F d\underline{x}_{\leq n+1} = \underline{x}_{\leq n}^{p-1} d\underline{x}_{\leq n}.$$

Par passage à la limite, les homomorphismes F (2.4.3) définissent un endomorphisme d'algèbre graduée F de $E^\wedge$ (2.13.1), tel que $dF = pFd$. En particulier, $dF \underline{x} = pF d\underline{x}$. Or $F \underline{x} = \underline{x}^p$, donc $dF \underline{x} = p\underline{x}^{p-1} d\underline{x}$, donc $pF d\underline{x} = p\underline{x}^{p-1} d\underline{x}$. Comme E^1 est sans p -torsion (2.13), on en conclut que $F d\underline{x} = \underline{x}^{p-1} d\underline{x}$, d'où (2.14.1), ce qui démontre 2.5 (a).

Notons φ_* la flèche (2.5.1). La démonstration de 2.5 (b) va consister à construire une flèche ψ_* inverse de φ_* , en envoyant les éléments de base de E sur certains éléments de $W \Omega A$.

Soit $k \in G$. Supposons d'abord $v_1 \leq \dots \leq v_n$, où $v_i = v_p(k_i)$. Pour $S \subset [1, n]$, nous écrivons $\underline{T}_S^k = \prod_{i \in S} \underline{T}_i^{k_i}$, où $\underline{T} \in W(A)$ est le représentant multiplicatif de T_i . Notons $f_0(k)$ l'élément de $W(A)$ défini par

$$(2.14.2) \quad f_0(k) = \begin{cases} p^{-v_1} \underline{T}^k & \text{si } k_1 \notin \mathbb{Z}, \\ \underline{T}^k & \text{si } k_1 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Pour $m \geq 1$, et $\underline{i} \in I_m$, où I_m est l'ensemble défini en 2.7, posons

$$y_0 = \begin{cases} 1 & \text{si } i_1 = 1, \\ p^{-v_1} \underline{T}_{[1, i_1]}^k & \text{si } i_1 > 1 \text{ et } k_1 \notin \mathbb{Z}, \\ \underline{T}_{[1, i_1]}^k & \text{si } i_1 > 1 \text{ et } k_1 \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

pour $s \geq 1$ tel que $v(i_s) < 0$:

$$y_s = p^{-v(i_s)} \underline{T}_{[i_s, i_{s+1}]}^k;$$

pour $s \geq 1$ tel que $0 \leq v(i_s) < +\infty$;

$$z_s = \underline{T}_{[i_s, i_{s+1}]}^{p^{-v(i_s)}k};$$

notons

$$(2.14.3) \quad f_i(k) \in W\Omega_A^m,$$

l'élément défini par

$$f_i(k) = y_0 \prod_{\substack{s \geq 1 \\ v(i_s) < 0}} dy_s \prod_{\substack{s \geq 1 \\ 0 \leq v(i_s) < +\infty}} z_s^{p^{v(i_s)} - 1} dz_s \prod_{\substack{s \geq 1 \\ v(i_s) = +\infty}} d \log \underline{T}_{i_s}.$$

Sans hypothèse sur la suite des $v_p(k_i)$, on définira k' , I_m , T' comme en 2.9, et l'on posera

$$(2.14.4) \quad \begin{cases} f_0(k) = f_0(k')(T'), \\ f_i(k) = f_i(k')(T') \quad (i \in I_m, m \geq 1), \end{cases}$$

avec $f_0(k')$, $f_i(k')$ donnés par (2.14.2), (2.14.3).

Soit

$$(2.14.5) \quad \psi : E \rightarrow W\Omega_A^\bullet$$

l'application $\mathbb{Z}_p$ -linéaire telle que $\psi(e_i(k)) = f_i(k)$ pour tout $k \in G$, tout $m \geq 0$ et tout $i \in I_m (= I_m(k))$ [avec la convention de 2.11 : $I_0 =$ la suite vide ($\emptyset$), $e_0 = e_\emptyset$, $f_0 = f_\emptyset$]. On vérifie facilement que $df_i(k)$ [resp. $V f_i(k)$] est donné par la formule 2.11 (a) [resp. 2.11 (b)], où e est remplacé par $\bar{f}$. donc ψ est un homomorphisme de complexes, tel que $\psi V = V \psi$.

Pour tout $r \geq 0$, posons

$$(2.14.6) \quad \text{Fil}^r W\Omega_A^\bullet = V^r W\Omega_A^\bullet + dV^r W\Omega_A^{\bullet-1}$$

$\text{Fil}^r W\Omega_A^\bullet$ est un sous-complexe de $W\Omega_A^\bullet$. D'autre part, pour $r \geq 1$, le composé $W_\bullet A \xrightarrow{V^r} W_{\bullet+r} A \xrightarrow{\text{projection}} W_r A$ est nul; en vertu de la surjectivité de π , (1.3) et de V2, il en est de même du composé $W_\bullet \Omega_A^\bullet \xrightarrow{V^r} W_{\bullet+r} \Omega_A^\bullet \rightarrow W_r \Omega_A^\bullet$, donc, par passage à la limite, le composé $W\Omega_A^\bullet \xrightarrow{V^r} W\Omega_A^\bullet \rightarrow W_r \Omega_A^\bullet$ est nul, et par suite on a

$$(2.14.7) \quad \text{Fil}^r W\Omega_A^\bullet \subset \text{Ker } W\Omega_A^\bullet \rightarrow W_r \Omega_A^\bullet. \quad (1)$$

L'homomorphisme ψ , étant compatible à d et V , envoie $\text{Fil}^r E$ dans $\text{Fil}^r W\Omega_A^\bullet$, donc induit un système projectif d'homomorphismes de complexes

$$(2.14.8) \quad \psi_r : E_r \rightarrow W_r \Omega_A^\bullet$$

(1) Nous verrons plus loin (3.31) que cette inclusion est en fait une égalité.

tel que $\psi_{\cdot+1} V = V \psi_{\cdot}$. Il découle trivialement des définitions que le composé $\phi_{\cdot} \psi_{\cdot}$ est l'identité, donc pour achever la démonstration de 2.5 (b), il suffit de prouver que $\psi_{\cdot}$ est surjectif. Or l'injection composée $B \hookrightarrow E^0 \hookrightarrow W(A)$ (2.3) se prolonge en un morphisme de $\mathbb{Z}_p$ -adg $\Omega_B^{\bullet} \rightarrow \Omega_{W(A)}^{\bullet}$, qui par composition avec la flèche canonique $\Omega_{W(A)}^{\bullet} \rightarrow W \Omega_A^{\bullet}$ donne un morphisme de $\mathbb{Z}_p$ -adg :

$$(2.14.9) \quad \Omega_B^{\bullet} \rightarrow W \Omega_A^{\bullet}.$$

Ce morphisme n'est autre que le morphisme induit par ψ (2.14.5), car ψ et (2.14.9) coïncident sur les éléments de base $e_i(k)$, pour $k \in G \cap \mathbb{Z}^n$. Donc, si M est la sous- $\mathbb{Z}_p$ -adg de $W \Omega_A^{\bullet}$ engendrée par les monômes $\underline{T}^k$ pour $k \in G \cap \mathbb{Z}^n$, et $M_{\cdot}$ son image dans $W \Omega_A^{\bullet}$, on a

$$(2.14.10) \quad \psi_{\cdot}(E_{\cdot}) \supset M_{\cdot}.$$

Comme $\psi_{\cdot}$ est compatible à V , la surjectivité de $\psi_{\cdot}$ va donc résulter du :

LEMME 2.14.11. — Pour tout $j \geq 1$ et tout i , on a

$$W_j \Omega_A^i = \sum_{0 \leq r < j} V^r M_{j-r}^i + \sum_{0 \leq r < j} dV^r M_{j-r}^{i-1}.$$

Démonstration. — Nous aurons besoin de l'identité

$$(2.14.12) \quad V^r x \cdot dV^s y = V^r (x y^{p^{r-s}-1} dy),$$

pour $x \in W \Omega_A^{\bullet}$, $y \in A$, $0 \leq s \leq r$. Par (1.15.3), on a

$$V^r x \cdot dV^s y = V^s (V^{r-s} x \cdot dy),$$

ce qui ramène la vérification de (2.14.12) au cas où $s=0$. On procède alors par récurrence sur r . Le cas $r=0$ est trivial. Pour $r \geq 0$, on a

$$V^{r+1} x \cdot dy = V(V^r x \cdot y^{p-1} dy) \quad (1.15.4)$$

$$= V(V^r (x y^{p^{r+1}-p^r} dy)) \quad (1.15.2)$$

$$= V^{r+1} (x y^{p^{r+1}-p^r} y^{p^r-1} dy) \quad (\text{par hypothèse de récurrence})$$

$$= V^{r+1} (x y^{p^{r+1}-1} dy),$$

ce qui établit (2.14.12). Prouvons maintenant 2.14.11 par récurrence sur i . Munissons $W_j(A)$ de la filtration définie par les $V^s W_{j-s}(A)$, et $\sum_{0 \leq r < j} V^r M_{j-r}^0$ de la filtration induite.

D'après (01.3.14), l'inclusion

$$\sum_{0 \leq r < j} V^r M_{j-r}^0 \hookrightarrow W_j(A)$$

induit un épimorphisme sur les gradués associés, donc 2.14.11 est vrai pour $i=0$. Notons S l'ensemble des monômes $\underline{T}^k$, $k \in G \cap \mathbb{Z}^n$. Compte tenu de la surjectivité de $\pi_{\cdot}$ (1.3),

il suffit maintenant de prouver que, pour $x \in S$, $z \in W_j \Omega_A^i$, $r < j$, on a

$$(\star) \quad V^r \underline{x} . dz \in \sum_{0 \leq m < j} V^m M_{j-m}^{i+1} + \sum_{0 \leq m < j} dV^m M_{j-m}^i.$$

Par l'hypothèse de récurrence, on peut supposer que $z = V^s y$, pour $0 \leq s < j$, avec $y = y_0 dy_1 \dots dy_i$, $y_0, \dots, y_i \in S$. Supposons d'abord $r \leq s$. L'identité

$$V^r \underline{x} . dV^s y = V^r (\underline{x} . dV^{s-r} y) \quad (V2)$$

ramène au cas où $r=0$. On a

$$\underline{x} dV^s y = d(\underline{x} V^s y) - d\underline{x} . V^s y = dV^s (\underline{x}^{p^r} y_0 dy_1 \dots dy_i) - d\underline{x} . V^s y \quad (1.5.1)$$

et

$$d\underline{x} . V^s y = V^s (y_0 \underline{x}^{p^{r-1}} d\underline{x} . dy_1 \dots dy_i)$$

par (2.14.12), donc $(\star)$ est vérifié si $r \leq s$. Si $r \geq s$, on a

$$V^r \underline{x} . dV^s y = V^r \underline{x} . dV^s y_0 . dV^s y_1 \dots dV^s y_i \quad (V2),$$

d'où, par application répétée de (2.14.12) :

$$V^r \underline{x} . dV^s y = V^r (\underline{x} . y_0^{p^{r-s-1}} \dots y_i^{p^{r-s-1}} dy_0 \dots dy_i),$$

donc $(\star)$ est vérifié dans tous les cas. Ceci achève la démonstration de 2.14.11, et par conséquent celle de 2.5.

COROLLAIRE 2.15. — Notons $\mathcal{F}$ le filtre des complémentaires des parties finies de G (2.6.1), et, pour $k \in G$, posons $\text{dén}(k) = \sup \text{dén}(k_i)$, où $\text{dén}(k_i) = p^{-v_p(k_i)}$ si $v_p(k_i) < 0$, 1 sinon. Avec les notations de 2.11, pour tout $m \geq 0$ l'isomorphisme (2.5.1) identifie $W \Omega_A^m$, comme $\mathbb{Z}_p$ -module, à l'ensemble des séries $\sum_{\substack{k \in G \\ i \in I_m(k)}} a_{i,k} e_i(k)$ telles que $a_{i,k} \in \mathbb{Z}_p$ pour tout $k \in G$ et tout $i \in I_m(k)$, et $\lim_{\mathcal{F}} \text{dén}(k) a_{i,k} = 0$.

Cela résulte facilement de 2.12 : pour $r \geq 0$, un élément $\sum a_{i,k} e_i(k)$ de E appartient à $\text{Fil}^r E$ si et seulement si l'on a $v_p(\text{dén}(k) a_{i,k}) \geq r$.

2.16. A titre d'exemple, explicitons 2.15 dans le cas $n=1$, $P=\emptyset$, i.e. $A = \mathbb{F}_p[T]$. On a $G = \mathbb{N}[p^{-1}]$. Pour $k \in G$, l'élément $e_0(k)$ est T^k si k est entier, $\text{dén}(k) T^k$ sinon. D'autre part, $I_1(k)$ est vide si $k=0$, réduit à la suite (1) sinon, et alors $e_1(k) = T^k dT/T$. On en conclut :

COROLLAIRE 2.16.1. — $W(\mathbb{F}_p[T])$ est l'ensemble des séries $\sum_{k \in \mathbb{N}[1/p]} a_k T^k$ avec $a_k \in \mathbb{Z}_p$, telles que $\text{dén}(k) | a_k$ pour tout k , et a_k tende vers zéro quand k tend vers l'infini suivant le filtre $\mathcal{F}$ des complémentaires des parties finies de $\mathbb{N}[1/p]$. $W \Omega_{\mathbb{F}_p[T]}^1$ est l'ensemble des séries $\sum_{\substack{k \in \mathbb{N}[1/p] \\ k \neq 0}} a_k T^k dT/T$ avec $a_k \in \mathbb{Z}_p$, telles que $\text{dén}(k) a_k$ tende vers zéro quand k tend vers l'infini

suivant $\mathcal{F}$. $W\Omega_{\mathbb{F}_p[T]}^i = 0$ pour $i > 1$. La structure d'algèbre différentielle graduée de $W\Omega_{\mathbb{F}_p[T]}^*$ est donnée par l'addition, la multiplication, et la dérivation habituelle des séries.

E. L'opérateur F . Formulaire.

THÉORÈME 2.17. — Soit X un topos annelé en $\mathbb{F}_p$ -algèbres. L'homomorphisme de systèmes projectifs d'anneaux $RF = FR : W_n \mathcal{O}_X \rightarrow W_{n-1} \mathcal{O}_X$ (0 1.3.1.5) (où $W_i \mathcal{O}_X \stackrel{\text{dln}}{=} 0$ si $i \leq 0$) se prolonge de manière unique en un homomorphisme de systèmes projectifs d'algèbres graduées

$$F : W_n \Omega_X^* \rightarrow W_{n-1} \Omega_X^*$$

tel que : (a) pour tout $n \geq 2$ et tout $x \in \mathcal{O}_X$, si $\underline{x}_{\leq n} = (x, 0, \dots, 0) \in W_n \mathcal{O}_X$ est le représentant multiplicatif de x , on ait

$$F d\underline{x}_{\leq n} = \underline{x}_{\leq n-1}^{p-1} d\underline{x}_{\leq n-1};$$

(b) pour tout $n \geq 1$, les homomorphismes $F dV$ et d de $W_n \mathcal{O}_X$ dans $W_n \Omega_X^1$ coïncident.

L'unicité découle de la surjectivité de π_* (1.3) et de ce que tout élément $x = (x_0, \dots, x_{n-1})$ de $W_n \mathcal{O}_X$ ($n \geq 1$) s'écrit :

$$x = (\underline{x}_0)_{\leq n} + V(\underline{x}_1)_{\leq n-1} + \dots + V^{n-1}(\underline{x}_{n-1})_{\leq 1}.$$

Prouvons l'existence de $F : W_n \Omega_X^* \rightarrow W_{n-1} \Omega_X^*$. Pour $n \leq 1$, $W_{n-1} \Omega_X^* = 0$, supposons donc $n \geq 2$. Soit

$$(2.17.1) \quad F d : W_n \mathcal{O}_X \rightarrow W_{n-1} \Omega_X^1,$$

l'application définie par

$$F dx = (\underline{x}_0)_{\leq n-1}^{p-1} d(\underline{x}_0)_{\leq n-1} + d(\underline{x}_1)_{\leq n-1} + \dots + dV^{n-2}(\underline{x}_{n-1})_{\leq 1},$$

pour $x = (x_0, \dots, x_{n-1}) \in W_n \mathcal{O}_X$. L'application $F d$ est une dérivation de $W_n \mathcal{O}_X$ dans $F_* W_{n-1} \Omega_X^1$ ($= W_{n-1} \Omega_X^1$ considéré comme $W_n \mathcal{O}_X$ module via $FR : W_n \mathcal{O}_X \rightarrow W_{n-1} \mathcal{O}_X$), i.e. vérifie les identités

$$(2.17.2) \quad \begin{cases} F d(x+y) = F dx + F dy, \\ F d(xy) = F x \cdot F dy + F y \cdot F dx, \end{cases}$$

pour $x, y \in W_n \mathcal{O}_X$ (avec FR écrit simplement F). Pour le voir, on peut supposer, d'après 1.10, que X est le topos ponctuel, puis, écrivant $\mathcal{O}_X$ comme limite inductive de ses sous- $\mathbb{F}_p$ -algèbres de type fini, on se ramène au cas où $\mathcal{O}_X$ est quotient de $A = \mathbb{F}_p[T_1, \dots, T_N]$. Relevant x, y dans $W_n(A)$, on se ramène finalement à $\mathcal{O}_X = A$. Grâce à 2.5, on dispose alors de

l'homomorphisme d'algèbres graduées $F : W_n \Omega_A^\bullet \rightarrow W_{n-1} \Omega_A^\bullet$ (2.4.3), et le composé $W_n A \xrightarrow{d} W_n \Omega_A^1 \xrightarrow{F} W_{n-1} \Omega_A^1$ coïncide avec la flèche (2.17.1) : cela résulte de (2.14.1) et de l'identité $F dV = d : W_n \Omega_A^1 \rightarrow W_n \Omega_A^{i+1}$, conséquence de (2.2.1). Les identités (2.17.2) en découlent aussitôt. Notons

$$(2.17.3) \quad F' : \Omega_{W_n \mathcal{O}_X}^\bullet \rightarrow W_{n-1} \Omega_X^\bullet,$$

l'homomorphisme d'algèbres graduées égal à FR en degré 0, et défini en degré 1 par la dérivation (2.17.1). Par construction, F' vérifie :

$$(2.17.4) \quad \begin{cases} F' d\underline{x}_{\leq n} = \underline{x}_{\leq n-1}^{p-1} d\underline{x}_{\leq n-1} & \text{pour tout } x \in \mathcal{O}_X, \\ F' dV y = dy & \text{pour tout } y \in W_{n-1} \mathcal{O}_X, \end{cases}$$

et il est clair que F' définit, pour n variable, un morphisme de systèmes projectifs d'algèbres graduées. Tout revient donc à voir que, si $N_n = \text{Ker } \pi_n : \Omega_{W_n \mathcal{O}_X}^\bullet \rightarrow W_n \Omega_X^\bullet$, on a $F'(N_n) = 0$: l'homomorphisme $F : W_n \Omega_X^\bullet \rightarrow W_{n-1} \Omega_X^\bullet$ défini par passage au quotient aura les propriétés (a) et (b) de 2.17. Compte tenu de la description de N_n donnée dans la démonstration de 1.3, il suffit de vérifier que $F' z = 0$ pour tout z de l'une des quatre formes suivantes :

$$(i) \quad z = \sum V a_\alpha dV x_{\alpha 1} \dots dV x_{\alpha i}, \text{ avec } a_\alpha, x_{\alpha 1}, \dots, x_{\alpha i} \in W_{n-1} \mathcal{O}_X \text{ tels que}$$

$$\sum a_\alpha dx_{\alpha 1} \dots dx_{\alpha i} = 0 \quad \text{dans } W_{n-1} \Omega_X^i;$$

$$(ii) \quad z = \sum dV a_\alpha dV x_{\alpha 1} \dots dV x_{\alpha i}, \text{ avec } a_\alpha, x_{\alpha 1}, \dots, x_{\alpha i} \text{ comme en (i);}$$

$$(iii) \quad z = V y \cdot d\underline{x}_{\leq n} - V(\underline{x}_{\leq n-1}^{p-1} y) dV \underline{x}_{\leq n-1}, \text{ avec } x \in \mathcal{O}_X, y \in W_{n-1} \mathcal{O}_X;$$

$$(iv) \quad z = dV y \cdot d\underline{x}_{\leq n} - dV(\underline{x}_{\leq n-1}^{p-1} y) dV \underline{x}_{\leq n-1}, \text{ avec } x, y \text{ comme en (iii). Or en vertu de (2.17.4), on a, dans le cas (i) :}$$

$$F' z = p \sum a_\alpha dx_{\alpha 1} \dots dx_{\alpha i} = 0,$$

dans le cas (ii) :

$$F' z = \sum da_\alpha dx_{\alpha 1} \dots dx_{\alpha i} = 0,$$

dans le cas (iii) :

$$F' z = p y \underline{x}_{\leq n-1}^{p-1} d\underline{x}_{\leq n-1} - p(\underline{x}_{\leq n-1}^{p-1} y) d\underline{x}_{\leq n-1} = 0,$$

et dans le cas (iv);

$$F' z = (dy) \underline{x}_{\leq n-1}^{p-1} d\underline{x}_{\leq n-1} - d(\underline{x}_{\leq n-1}^{p-1} y) d\underline{x}_{\leq n-1} = 0$$

puisque d est une dérivation. Donc $F'(N_n) = 0$, ce qui achève la démonstration.

Remarque 2.17.5. — L'assertion d'unicité de 2.17 entraîne que, si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme de topos annelés en $\mathbb{F}_p$ -algèbres, la flèche de fonctorialité $W_* \Omega_Y^\bullet \rightarrow f_* W_* \Omega_X^\bullet$ (1.12.2) est automatiquement compatible à F . En particulier, les isomorphismes canoniques (1.9.1), (1.11.1), (1.14.1) sont compatibles à F , i.e. transforment $F \otimes F$ en F .

PROPOSITION 2.18. — Avec les notations de 2.17, on a les identités :

$$\begin{aligned}
 (2.18.1) \quad & FV = VF = p : W_n \Omega_X^i \rightarrow W_n \Omega_X^i; \\
 (2.18.2) \quad & dF = p Fd : W_n \Omega_X^i \rightarrow W_{n-1} \Omega_X^{i+1}; \quad Vd = p dV : W_n \Omega_X^i \rightarrow W_{n+1} \Omega_X^i; \\
 (2.18.3) \quad & FdV = d : W_n \Omega_X^i \rightarrow W_n \Omega_X^{i+1}; \\
 (2.18.4) \quad & x Vy = V(Fx \cdot y), \quad x \in W_n \Omega_X^i, \quad y \in W_{n-1} \Omega_X^j; \\
 (2.18.5) \quad & Fdx = R(x^{p-1} dx) + d\alpha(x), \quad x \in W_n \mathcal{O}_X,
 \end{aligned}$$

où $\alpha : W_n \mathcal{O}_X \rightarrow W_{n-1} \mathcal{O}_X$ est l'application définie en (01.4.9);

$$(2.18.6) \quad d\gamma_k(x) = \gamma_{k-1}(x) dx, \quad x \in VW_n \mathcal{O}_X, \quad k \geq 1,$$

où γ_k est l'application de puissances divisées (01.4.3). En outre, si F désigne l'endomorphisme de $W_n \Omega_X^\bullet$ défini, par fonctorialité, par l'endomorphisme F de $W_n \mathcal{O}_X$, on a, pour tout i , un carré commutatif

$$(2.18.7) \quad \begin{array}{ccc} W_n \Omega_X^i & \xrightarrow{F} & W_n \Omega_X^i \\ \parallel & & \downarrow \\ W_n \Omega_X^i & \xrightarrow{p^i F} & W_{n-1} \Omega_X^i, \end{array}$$

où la flèche verticale de droite est la projection canonique.

Comme dans la démonstration de 2.17, on se ramène, à l'aide de 1.10, au cas où X est le topos ponctuel annelé par $A = \mathbb{F}_p[T_1, \dots, T_N]$. Dans ce cas, il découle de (2.14.1) et 2.2, 2.4 que l'opérateur F construit en 2.17 coïncide avec celui défini en (2.4.3) [modulo l'identification (2.5.1)] et qu'on a les identités (2.18.1) à (2.18.4). Pour $x \in W(A)$, on a, par définition de α , $Fx = x^p + p\alpha(x)$, d'où $dFx = px^{p-1} dx + p d\alpha(x)$ (dans $E^1 = W\Omega_A^1$), mais $dFx = p Fdx$, donc $p Fdx = px^{p-1} dx + p d\alpha(x)$, et comme E^1 est sans torsion (2.13), on en déduit $Fdx = x^{p-1} dx + d\alpha(x)$ dans $W\Omega_A^1$, d'où, par projection dans $W_{n-1} \Omega_A^1$ l'identité (2.18.5). De même, l'identité $d(x^k) = kx^{k-1} dx$ pour $x \in VW(A)$ implique, par division par $k!$, $d(\gamma_k x) = \gamma_{k-1}(x) dx$, d'où (2.18.6) par projection dans $W_n \mathcal{O}_X$. Enfin, d'après (2.18.2), $p^i F : W_n \Omega_X^i \rightarrow W_{n-1} \Omega_X^i$ est un homomorphisme d'adg, et coïncide en degré 0 avec le composé $W_n \Omega_X^i \xrightarrow{F} W_n \Omega_X^i \rightarrow W_{n-1} \Omega_X^i$, donc lui est égal, ce qui prouve la commutativité de (2.18.7) et achève la démonstration.

Remarque 2.18.8. — L'isomorphisme (2.5.1) est compatible aux opérateurs F des deux membres. Cela résulte de (2.14.1) et 2.2.

2.19. Par passage à la limite, les homomorphismes $F : W_n \Omega_X^\bullet \rightarrow W_{n-1} \Omega_X^\bullet$ définissent un homomorphisme d'algèbres graduées

$$(2.19.1) \quad F : W\Omega_X^\bullet \rightarrow W\Omega_X^\bullet,$$

qui vérifie les identités déduites de 2.18 :

$$(2.19.2) \quad FV = VF = p,$$

$$(2.19.3) \quad dF = p F d, \quad V d = p dV,$$

$$(2.19.4) \quad F dV = d,$$

$$(2.19.5) \quad x V y = V (F x \cdot y), \quad x \in W \Omega_X^i, \quad y \in W \Omega_X^j,$$

$$(2.19.6) \quad F dx = x^{p-1} dx + d\alpha(x), \quad x \in W \mathcal{O}_X,$$

où $\alpha : W \mathcal{O}_X \rightarrow W \mathcal{O}_X$ est l'application définie en (0.1.4.6). D'après (2.18.7), l'endomorphisme F de $W \Omega_X^\bullet$ défini, par functorialité, par l'endomorphisme F de $W \mathcal{O}_X$ coïncide avec $p^i F$ en degré i .

L'identité (2.19.5) généralise (1.15.2), ainsi que (1.15.4), compte tenu de (2.19.6).

F. Compléments sur le complexe des formes entières.

2.20. Soient k un anneau parfait de car. p , $W = W(k)$, $K = W \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$, posons

$$A' = A \otimes_{\mathbb{F}_p} k, \quad B' = B \otimes_{\mathbb{Z}_p} W, \quad C' = C \otimes_{\mathbb{Q}_p} K = B' \otimes_W K,$$

où A, B, C sont les anneaux définis en (2.1.1), (2.1.2). On voit comme en 2.1 que toute forme $x \in \Omega_{C'/K}^m$ s'écrit de manière unique

$$x = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} a_{i_1 \dots i_m}(T) d \log T_{i_1} \dots d \log T_{i_m},$$

avec $a_{i_1 \dots i_m}(T) \in C'$; on dit que x est entière si ses « coordonnées » $a_{i_1 \dots i_m}$ sont à coefficients dans W , et l'on définit comme en 2.1 le sous-complexe $E' = E_{A'}$ de $\Omega_{C'/K}^\bullet$ formé des formes entières x telles que dx soit entière. E' est une sous-adg de $\Omega_{C'/K}^\bullet$, contenant $\Omega_{B'/W}^\bullet$. La flèche naturelle

$$(2.20.1) \quad E \otimes_{\mathbb{Z}_p} W \rightarrow E'$$

est un isomorphisme : E' est en effet G -gradué (2.6.1), et la démonstration de 2.8 montre que, pour chaque $g \in G$, les éléments $e_i(g)$ définis en 2.7 et 2.9 forment une base sur W de la composante ${}_g E'$ de degré g de E' .

L'automorphisme F de C' défini par $F(x \otimes y) = Fx \otimes \sigma y$, où σ est l'automorphisme de Frobenius de K , se prolonge en un automorphisme F de $\Omega_{C'/K}^\bullet$, donné par F sur les coordonnées; on note V l'endomorphisme de $\Omega_{C'/K}^\bullet$ défini par $V = p F^{-1}$. Les opérateurs F et V vérifient les formules (2.2.1), (2.2.2), (2.2.3), et induisent sur E' des opérateurs F et V donnés, via l'identification (2.20.1), par $F(x \otimes y) = Fx \otimes \sigma y$, $V(x \otimes y) = Vx \otimes \sigma^{-1} y$, où σ est l'automorphisme de Frobenius de W .

On voit comme en 2.4 que, pour tout $r \geq 0$, le sous-complexe $\text{Fil}^r E'$ de E' défini par $\text{Fil}^r E' = V^r E' + d V^r E'^{r-1}$ est un idéal différentiel gradué de E' . L'isomorphisme (2.20.1) induit un isomorphisme

$$(2.20.2) \quad \text{Fil}^r E \otimes_{\mathbb{Z}_p} W \xrightarrow{\sim} \text{Fil}^r E',$$

qui montre notamment, compte tenu de 2.10, que $\text{Fil}^r E'$ est l'idéal différentiel gradué engendré par $V^r E'^0$. On déduit de (2.20.2) un isomorphisme de systèmes projectifs d'adg :

$$(2.20.3) \quad E' \otimes_{\mathbb{Z}_p} W \rightarrow E'$$

où $E'_r = E' / \text{Fil}^r E'$, par lequel l'homomorphisme $V : E'_r \rightarrow E'_{r+1}$ induit par l'opérateur V de E' s'identifie à $V \otimes \sigma^{-1}$. D'après 1.9.2 et 2.5, il en résulte que (E'_r, V) est un V -pro-complexe de DR, et que la flèche canonique (de V -pro-complexe de DR) :

$$(2.20.4) \quad W_r \Omega_{A'}^\bullet \rightarrow E'_r$$

est un isomorphisme. Par cet isomorphisme, les homomorphismes $F : W_r \Omega_{A'}^\bullet \rightarrow W_{r-1} \Omega_{A'}^\bullet$ définis en 2.17 s'identifient aux homomorphismes $F : E'_r \rightarrow E'_{r-1}$ définis par l'endomorphisme F de E' : par extension des scalaires, cela résulte du fait, déjà observé, que (2.5.1) est compatible aux homomorphismes F des deux membres (2.18.8).

Il découle également de (2.10.1) et 2.12, par extension des scalaires, que $\text{Fil}^r E'$ est G -gradué, et que l'on a, pour tout $g \in G$:

$$(2.20.5) \quad {}_g \text{Fil}^r E' = p^{v(r,g)} ({}_g E'),$$

et l'on en déduit, comme en 2.13, que la multiplication par p induit, pour tout r , un homomorphisme injectif

$$(2.20.6) \quad p : E'_r \rightarrow E'_{r+1},$$

et que

$$(2.20.7) \quad \bigcap \text{Fil}^r E' = 0.$$

On notera aussi que (2.20.5) entraîne en particulier que, pour tout $r \geq 0$:

$$(2.20.8) \quad \Omega_{B'/W}^\bullet \cap \text{Fil}^r E' = p^r \Omega_{B'/W}^\bullet.$$

2.21. Les compléments présentés dans cette dernière section ne serviront pas dans la suite. Ils éclaireront cependant certains résultats de 3 D (spécialement 3.14) et le théorème de comparaison (II 1.4).

Soient k, W, K comme en 2.20, notons A, B, C, E les objets notés A', B', C', E' en 2.20. Comme $\text{Fil}^r E$ est G -gradué, la G -gradation de E définit par passage au quotient une G -gradation de $E_r = E / \text{Fil}^r E$:

$$(2.21.1) \quad E_r = \bigoplus_{g \in G} {}_g E_r,$$

où

$$(2.21.2) \quad {}_g E_r = {}_g E / {}_g \text{Fil}^r E = {}_g E / p^{v(r,g)} {}_g E,$$

d'après (2.20.5). Posons

$$B_r = B / p^r B = B \otimes W_r.$$

Comme $\Omega_B^\bullet = \bigoplus_{g \in G \cap (\mathbb{Z}^n)} {}_g E$, il résulte de (2.21.1), (2.21.2) que E_r se décompose en

$$(2.21.3) \quad E_r = \Omega_{B_r}^\bullet \oplus \bigoplus_{\substack{g \in G \\ g \notin \mathbb{Z}^n}} {}_g E_r.$$

PROPOSITION 2.21.4 (Deligne [21]). — *Pour $g \notin \mathbb{Z}^n$, le complexe ${}_g E$ est homotopiquement trivial.*

Par suite, l'inclusion

$$(2.21.5) \quad \Omega_B^\bullet \hookrightarrow E$$

est une équivalence d'homotopie. Plus généralement, il s'ensuit, grâce à (2.20.5), que, pour tout r , l'inclusion

$$(2.21.6) \quad p^r \Omega_B^\bullet \hookrightarrow \text{Fil}^r E$$

est une équivalence d'homotopie, donc que l'inclusion de (2.21.3) :

$$(2.21.7) \quad \Omega_{B_r}^\bullet = \Omega_B^\bullet / p^r \Omega_B^\bullet \hookrightarrow E_r$$

est un quasi-isomorphisme.

Prouvons 2.21.4. Quitte à faire une permutation des coordonnées, on peut supposer que $g_1 \notin \mathbb{Z}$ (donc $g_1^{-1} \in \mathbb{Z}_p$). Notons h l'opérateur sur $\Omega_{C/K}^\bullet$ défini par le produit intérieur droit par $g_1^{-1} T_1(d/dT_1)$. Si $x \in \Omega_{C/K}^m$ a pour coordonnées a_i (2.1), on a

$$hx = g_1^{-1} \sum_{i_1=1 < i_2 < \dots < i_m \leq n} a_i d \log T_{i_2} \dots d \log T_{i_m}.$$

En particulier, si x est une forme entière, il en est de même de hx . De plus, avec la notation de Cartan, on a $dh + hd = \theta_v$, où $v = g_1^{-1} T_1(d/dT_1)$. Donc, si x est de degré g , on a

$$(\star) \quad (dh + hd)(x) = x.$$

Soit $x \in {}_g E$. Comme x est une forme entière, hx est entière. D'autre part, comme dx est entière, hdx est entière, donc aussi dhx d'après $(\star)$, donc $hx \in {}_g E$. L'opérateur h induit donc un opérateur d'homotopie sur ${}_g E$, ce qui démontre 2.21.4.

3. ÉTUDE DE $W_\bullet \Omega_X^\bullet$ POUR X LISSE SUR UNE BASE PARFAITE. — Dans ce numéro, S désigne un schéma parfait de car. p et X un schéma lisse sur S .

A. La filtration canonique

3.1. Pour $n, r \in \mathbb{Z}$, posons

$$(3.1.1) \quad \text{Fil}^n W_r \Omega_X^\bullet = \begin{cases} W_r \Omega_X^\bullet & \text{si } n \leq 0 \text{ ou } r \leq 0, \\ \text{Ker } R^{r-n} : W_r \Omega_X^\bullet \rightarrow W_n \Omega_X^\bullet & \text{si } 1 \leq n < r, \\ 0 & \text{si } n \geq r. \end{cases}$$

Pour n donné, les $\text{Fil}^n W_r \Omega_X^\bullet$ forment un système projectif d'idéaux différentiels gradués de $W_r \Omega_X^\bullet$. La filtration (décroissante) de $W_r \Omega_X^\bullet$ définie par les $\text{Fil}^n W_r \Omega_X^\bullet$ s'appellera *filtration canonique*.

Rappelons (1.15.1) que $W \Omega_X^\bullet = \varprojlim_r W_r \Omega_X^\bullet$. On appellera *filtration canonique* de $W \Omega_X^\bullet$ la filtration définie par les idéaux différentiels gradués

$$(3.1.2) \quad \text{Fil}^n W \Omega_X^\bullet = \begin{cases} W \Omega_X^\bullet & \text{si } n \leq 0, \\ \text{Ker } W \Omega_X^\bullet \xrightarrow{(1.15.5)} W_n \Omega_X^\bullet & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

La topologie sur $W \Omega_X^\bullet$ associée à la filtration canonique s'appellera *topologie canonique*. Par définition, on a donc, pour tout n :

$$(3.1.3) \quad \text{Fil}^n W \Omega_X^\bullet = \varprojlim_r \text{Fil}^n W_r \Omega_X^\bullet,$$

et $\text{Fil}^n W \Omega_X^\bullet$ est complet pour la filtration canonique.

Posons

$$(3.1.4) \quad \begin{cases} \text{gr}^n W_r \Omega_X^\bullet = \text{Fil}^n W_r \Omega_X^\bullet / \text{Fil}^{n+1} W_r \Omega_X^\bullet, \\ \text{gr}^n W \Omega_X^\bullet = \text{Fil}^n W \Omega_X^\bullet / \text{Fil}^{n+1} W \Omega_X^\bullet. \end{cases}$$

Pour n donné, le système projectif $\text{gr}^n W_r \Omega_X^\bullet$ est essentiellement constant : pour $r \geq n+1$, les flèches canoniques

$$(3.1.5) \quad \text{gr}^n W \Omega_X^\bullet \rightarrow \text{gr}^n W_r \Omega_X^\bullet \rightarrow \text{gr}^n W_{n+1} \Omega_X^\bullet = \text{Fil}^n W_{n+1} \Omega_X^\bullet$$

sont des isomorphismes.

PROPOSITION 3.2. — Pour tout $n \geq 0$ et tout r , $\text{Fil}^n W_r \Omega_X^\bullet$ est l'idéal différentiel gradué de $W_r \Omega_X^\bullet$ engendré par $V^n W_{r-n}(\mathcal{O}_X)$, et l'on a, pour tout i :

$$\text{Fil}^n W_r \Omega_X^i = V^n W_{r-n} \Omega_X^i + d V^n W_{r-n} \Omega_X^{i-1}.$$

La question est locale sur X , donc on peut supposer S affine d'anneau k , et X étale sur $Y = \text{Spec}(A)$, où $A = k[T_1, \dots, T_N]$. L'isomorphisme (1.14.1) induit un isomorphisme

$$W_r \mathcal{O}_X \otimes_{W_r \mathcal{O}_Y} \text{Fil}^n W_r \Omega_Y^\bullet \xrightarrow{\sim} \text{Fil}^n W_r \Omega_X^\bullet,$$

donc on est ramené à $X=Y$. Si E est le complexe de formes entières E_A construit en 2.20 (noté E' dans *loc. cit.*), on a, d'après (2.20.4) :

$$W_r \Omega_A^\bullet \xrightarrow{\sim} E / \text{Fil}^r E,$$

et la proposition résulte de ce que $\text{Fil}^n E$, dont la composante de degré i est $V^n E^i + d V^n E^{i-1}$, est l'idéal différentiel gradué engendré par $V^n E^0$.

Nous déterminerons plus loin (3.31), en termes de l'opérateur V , la filtration canonique de $W\Omega_X^\bullet$.

PROPOSITION 3.3 (cf. [51], 3.1). — *Pour tout n et tout i , l'homomorphisme $F : W_{n+1}\Omega_X^i \rightarrow W_n\Omega_X^i$ (2.17) induit un homomorphisme*

$$(3.3.1) \quad F : W_n\Omega_X^i \rightarrow W_n\Omega_X^i/dV^{n-1}\Omega_X^{i-1}.$$

Pour $n=1$, (3.3.1) est l'opération de Cartier inverse

$$C^{-1} : \Omega_X^i \rightarrow \Omega_X^i/d\Omega_X^{i-1} \quad [\text{cf. (02.1.4)}].$$

Grâce à la formule $FdV = d[2.17(b)]$, il résulte de 3.2 que l'on a

$$F(\text{Fil}^n W_{n+1}\Omega_X^i) \subset dV^{n-1}\Omega_X^{i-1},$$

d'où la première assertion. La seconde découle de la caractérisation de C^{-1} et de la relation 2.17(a).

PROPOSITION 3.4. — *Pour tout n , la multiplication par $p : W_{n+1}\Omega_X^\bullet \rightarrow W_{n+1}\Omega_X^\bullet$ induit un homomorphisme injectif $\underline{p} : W_n\Omega_X^\bullet \rightarrow W_{n+1}\Omega_X^\bullet$, et l'on a*

$$(3.4.1) \quad \text{Ker}(p^i : W_{n+1}\Omega_X^\bullet \rightarrow W_{n+1}\Omega_X^\bullet) = \text{Fil}^{n+1-i} W_{n+1}\Omega_X^\bullet$$

pour tout i tel que $0 \leq i \leq n+1$.

D'après 3.2, on a $p(\text{Fil}^n W_{n+1}\Omega_X^\bullet) = 0$, donc la multiplication par p dans $W_{n+1}\Omega_X^\bullet$ induit un homomorphisme $\underline{p} : W_n\Omega_X^\bullet \rightarrow W_{n+1}\Omega_X^\bullet$. Pour montrer que celui-ci est injectif, on se ramène, comme dans la démonstration de 3.2, au cas où $X = \text{Spec}(A)$, $A = k[T_1, \dots, T_N]$, pour lequel l'homomorphisme considéré s'identifie à (2.20.6), qui est injectif. On en déduit (3.4.1) par récurrence sur i : pour $i=0$, la formule est triviale, et si $x \in W_{n+1}\Omega_X^\bullet$ est tel que $p^{i+1}x=0$, on en tire $px \in \text{Fil}^{n+1-i} W_{n+1}\Omega_X^\bullet$ par l'hypothèse de récurrence, d'où $x \in \text{Fil}^{n-i} W_{n+1}\Omega_X^\bullet$ grâce à la première assertion; on a donc $\text{Ker } p^{i+1} \subset \text{Fil}^{n-i}$, et comme l'inclusion opposée est triviale, la proposition est démontrée.

COROLLAIRE 3.5. — *Pour tout $r \geq 0$ et tout i , les endomorphismes p^r, F^r, V^r du pro-objet $W\Omega_X^i$ sont injectifs, et l'on a des suites exactes de pro-objets*

$$(3.5.1) \quad 0 \rightarrow W\Omega_X^i/F^r W\Omega_X^i \xrightarrow{V^r} W\Omega_X^i/p^r W\Omega_X^i \rightarrow W\Omega_X^i/V^r W\Omega_X^i \rightarrow 0,$$

$$(3.5.2) \quad 0 \rightarrow W\Omega_X^i/V^r W\Omega_X^i \xrightarrow{F^r} W\Omega_X^i/p^r W\Omega_X^i \rightarrow W\Omega_X^i/F^r W\Omega_X^i \rightarrow 0.$$

D'après 3.4, les flèches de transition du système projectif $\text{Ker}(p^r : W_n\Omega_X^\bullet \rightarrow W_n\Omega_X^\bullet)$ sont nulles. La première assertion en résulte, compte tenu de la formule $FV = VF = p$ (2.18.1). La deuxième assertion en découle formellement.

COROLLAIRE 3.6. — Pour tout $r \geq 0$ et tout i , les endomorphismes p^r, F^r, V^r de $W\Omega_X^i$ sont injectifs et d'image fermée pour la topologie canonique (3.1), et l'on a des suites exactes

$$(3.6.1) \quad 0 \rightarrow W\Omega_X^i / F^r W\Omega_X^i \xrightarrow{V^r} W\Omega_X^i / p^r W\Omega_X^i \rightarrow W\Omega_X^i / V^r W\Omega_X^i \rightarrow 0,$$

$$(3.6.2) \quad 0 \rightarrow W\Omega_X^i / V^r W\Omega_X^i \xrightarrow{F^r} W\Omega_X^i / p^r W\Omega_X^i \rightarrow W\Omega_X^i / F^r W\Omega_X^i \rightarrow 0.$$

Cela résulte immédiatement de 3.5, compte tenu de 1.13.1 et du fait que le système projectif $W_n\Omega_X^\bullet$ est strict.

PROPOSITION 3.7. — (a) Si X est de dimension relative $\leq N$, on a $W_n\Omega_X^i = 0$ pour $i > N$.

(b) Si X est purement de dimension relative N , alors, pour tout n , $F : W_n\Omega_X^N \rightarrow W_{n-1}\Omega_X^N$ est surjectif (donc, compte tenu de 3.5, l'endomorphisme F du pro-objet $W_n\Omega_X^N$ est un automorphisme).

Par localisation, on se ramène, comme précédemment, à $X = \text{Spec}(A)$, $A = k[T_1, \dots, T_N]$. Si $E = E_A$ est le complexe de formes entières correspondant, l'isomorphisme (2.20.4) :

$$W_n\Omega_A^\bullet \xrightarrow{\sim} E.$$

entraîne aussitôt (a). Pour (b), il suffit de prouver que l'endomorphisme F de E^N est surjectif : or, par définition, on a

$$E^N = W[(T_i^{p^{-\infty}})_{1 \leq i \leq N}]^+ d \log T_1 \dots d \log T_N$$

(où le $+$ désigne la somme des composantes G -homogènes de degré totalement positif), et l'assertion résulte de la définition de F .

B. Structure de $\text{gr } W\Omega_X^\bullet$.

THÉORÈME 3.8. — Avec les notations de (02.2.2), on a, pour tout $n \geq 0$ et tout i , des morphismes de suites exactes

$$(3.8.1) \quad \begin{array}{ccccc} 0 \rightarrow B_n\Omega_X^i & \rightarrow & \Omega_X^i & \xrightarrow{V^n} & W_{n+1}\Omega_X^i \\ \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ 0 \rightarrow B_{n+1}\Omega_X^i & \rightarrow & \Omega_X^i & \xrightarrow{V^n} & W_{n+1}\Omega_X^i / dV^n\Omega_X^{i-1}, \end{array}$$

$$(3.8.2) \quad \begin{array}{ccccc} 0 \rightarrow Z_{n+1}\Omega_X^{i-1} & \rightarrow & \Omega_X^{i-1} & \xrightarrow{dV^n} & W_{n+1}\Omega_X^i \\ \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ 0 \rightarrow Z_n\Omega_X^{i-1} & \rightarrow & \Omega_X^{i-1} & \xrightarrow{dV^n} & W_{n+1}\Omega_X^i / V^n\Omega_X^i, \end{array}$$

où les flèches verticales de gauche (resp. droite) sont les inclusions (resp. projections) canoniques.

Grâce à 1.14 et (02.2.7), on peut supposer, par localisation étale, que $S = \text{Spec}(k)$, $X = \text{Spec}(A)$, $A = k[T_1, \dots, T_r]$. Soient $B = W[T_1, \dots, T_r]$, $\Omega_B^\bullet$ le complexe de DR de B/W ,

et $E_{\mathbb{F}_p[\Gamma_1, \dots, \Gamma_j]} \otimes W$ le complexe de formes entières noté E' dans 2.20. Pour tout $m \geq 0$, on a

$$W_m \Omega_A^* \xrightarrow{\sim} E / \text{Fil}^m E,$$

où, pour tout i :

$$\text{Fil}^m E^i = V^m E^i + d V^m E^{i-1}.$$

Comme E est engendré par E^0 en tant qu'adg et que $E^0 = \sum_{j \geq 0} V^j B[2.3(b)(i)]$, on a aussi, grâce à (2.2.3) :

$$(3.8.3) \quad \text{Fil}^m E^i = \sum_{j \geq 0} V^{m+j} \Omega_B^i + d V^{m+j} \Omega_V^{i-1}.$$

Cela étant, soit $x \in \Omega_A^i$ relevé en $y \in \Omega_B^i$. Si $V^n y \in \text{Fil}^{n+1} E^i$, d'après (3.8.3) on peut écrire :

$$V^n y = \sum_{1 \leq m \leq N} V^{n+m} z_m + d V^{n+m} t_m,$$

avec $z_m \in \Omega_B^i$, $t_m \in \Omega_B^{i-1}$. Appliquant F^{n+N} aux deux membres, on obtient (compte tenu de ce que $FV = VF = p$, $FdV = d$) :

$$p^n F^N y = p^n \left(\sum_{1 \leq m \leq N} p^m F^{N-m} z_m \right) + \sum_{1 \leq m \leq N} F^{N-m} dt_m.$$

Multipliant par p^N , on en déduit

$$p^{n+N-1} (F^N y - pu) = dv,$$

où

$$u = \sum_{1 \leq m \leq N} p^{m-1} F^{N-m} z_m, \quad v = \sum_{1 \leq m \leq N} p^{m-1} F^{N-m} t_m.$$

Comme $F^N y - pu$ relève $C^{-N} x$ (3.3), il résulte, d'après [02.3.14(b)], (02.3.17), que

$$C^{-N} x \in B_{n+N} \Omega_A^i / B_N \Omega_A^i.$$

Comme C^{-N} donne un isomorphisme $B_n \Omega_A^i \xrightarrow{\sim} B_{n+N} \Omega_A^i / B_N \Omega_A^i$, on en conclut que $x \in B_n \Omega_A^i$, ce qui prouve l'exactitude de la ligne supérieure de (3.8.1).

Si $V^n y \in \text{Fil}^{n+1} E^i + d V^n E^{i+1}$, on peut écrire :

$$V^n y = \sum_{1 \leq m \leq N} V^{n+m} z_m + \sum_{0 \leq m \leq N} d V^{n+m} t_m,$$

avec $z_m \in \Omega_B^i$, $t_m \in \Omega_B^{i-1}$, et, par le même calcul que ci-dessus, on obtient :

$$p^{n+N} (F^N y - pu) = dv,$$

avec

$$u = \sum_{1 \leq m \leq N} p^{m-1} F^{N-m} z_m, \quad v = \sum_{0 \leq m \leq N} p^m F^{N-m} t_m.$$

Raisonnant comme précédemment, on en déduit que $x \in B_{n+1} \Omega_A^i$, ce qui prouve l'exactitude de la ligne inférieure de (3.8.1).

Soit maintenant $x \in \Omega_A^{i-1}$ relevé en $y \in \Omega_B^{i-1}$. Si $dV^n y \in \text{Fil}^{n+1} E_i$, on peut écrire :

$$dV^n y = \sum_{1 \leq m \leq N} V^{n+m} z_m + dV^{n+m} t_m,$$

avec $z_m \in \Omega_B^i$, $t_m \in \Omega_B^{i-1}$. Appliquant $p^N F^{n+N}$ aux deux membres, on obtient :

$$d(F^N y - pu) = p^{n+N+1} v,$$

où

$$u = \sum_{1 \leq m \leq N} p^{m-1} dF^{N-m} t_m, \quad v = \sum_{1 \leq m \leq N} p^{m-1} F^{N-m} z_m.$$

Comme $F^N y - pu$ relève $C^{-N} x$, il en résulte, d'après [02.3.14(a)], que $C^{-N} x \in Z_{n+N+1} \Omega_A^{i-1} / B_N \Omega_A^{i-1}$, et comme C^{-N} donne un isomorphisme

$$Z_{n+1} \Omega_A^{i-1} \xrightarrow{\sim} Z_{n+N+1} \Omega_A^{i-1} / B_N \Omega_A^{i-1},$$

on en conclut que $x \in Z_{n+1} \Omega_A^{i-1}$, ce qui prouve l'exactitude de la ligne supérieure de (3.8.2).

Si $dV^n y \in \text{Fil}^{n+1} E^i + V^n E^i$, on peut écrire :

$$dV^n y = \sum_{0 \leq m \leq N} V^{n+m} z_m + \sum_{1 \leq m \leq N} dV^{n+m} t_m,$$

avec $z_m \in \Omega_B^i$, $t_m \in \Omega_B^{i-1}$. Appliquant $p^N F^{n+N}$ aux deux membres, on en déduit

$$d(F^N y - pu) = p^{n+N} v,$$

où

$$u = \sum_{1 \leq m \leq N} p^{m-1} F^{N-m} t_m, \quad v = \sum_{0 \leq m \leq N} p^m F^{N-m} z_m,$$

et par le même argument que ci-dessus, on en conclut que $x \in Z_n \Omega_A^{i-1}$, ce qui prouve l'exactitude de la ligne inférieure de (3.8.2) et achève la démonstration de 3.8.

COROLLAIRE 3.9. — *Pour tout $n \geq 0$ et tout i , on a des suites exactes de $\mathcal{O}_X$ -modules localement libres de type fini*

$$(3.9.1) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & F_*^{n+1} \Omega_X^{i-1} / Z_{n+1} \Omega_X^{i-1} & & & \\ & & & \downarrow dV^n & \searrow & & \\ 0 \rightarrow & F_*^{n+1} \Omega_X^i / B_n \Omega_X^i & \xrightarrow{V^n} & \text{gr}^n W \Omega_X^i & \xrightarrow{\beta} & F_*^{n+1} \Omega_X^{i-1} / Z_n \Omega_X^{i-1} & \rightarrow 0 \\ & \searrow & & \downarrow \beta' & & & \\ & & & F_*^{n+1} \Omega_X^i / B_{n+1} \Omega_X^i & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ & & & 0 & & & \end{array}$$

où $\text{gr}^n W \Omega_X^i$ est considéré comme $\mathcal{O}_X$ -module via

$$F : \mathcal{O}_X = W_{n+1} \mathcal{O}_X / V W_n \mathcal{O}_X \hookrightarrow W_{n+1} \mathcal{O}_X / p W_{n+1} \mathcal{O}_X,$$

et les flèches β, β' sont telles que $\beta(V^n x + d V^n y) = \text{classe de } y$, $\beta'(V^n x + d V^n y) = \text{classe de } x$, pour $x \in \Omega_X^i$, $y \in \Omega_X^{i-1}$. Les flèches obliques rendant les triangles correspondants commutatifs sont les projections canoniques.

La définition et l'exactitude des lignes horizontale et verticale résultent immédiatement de 3.8, ainsi que l'assertion relative aux flèches obliques. La $\mathcal{O}_X$ -linéarité des flèches en jeu est évidente. D'autre part, le même argument que celui utilisé pour prouver [02.2.8(a)] montre que les termes extrêmes de chaque suite sont localement libres de type fini, d'où le corollaire.

Remarques 3.10. — (a) On voit facilement que la structure de $(W_{n+1} \mathcal{O}_X / p W_{n+1} \mathcal{O}_X)$ -module de $V^n \Omega_X^i \subset \text{gr}^n W \Omega_X^i$ et $\text{gr}^n W \Omega_X^i / V^n \Omega_X^i$ se factorise en une structure de $\mathcal{O}_X$ -module (i.e. que $V W_n \mathcal{O}_X \cdot V^n \Omega_X^i = 0$ et $V W_n \mathcal{O}_X \cdot \text{gr}^n W \Omega_X^i \subset V^n \Omega_X^i$). La ligne supérieure de (3.8.1) et la ligne inférieure de (3.8.2) fournissent des isomorphismes $\mathcal{O}_X$ -linéaires :

$$(3.10.1) \quad F_* \Omega_X^i / B_n \Omega_X^i \xrightarrow{V^n} V^n \Omega_X^i,$$

$$(3.10.2) \quad F_* \Omega_X^{i-1} / Z_n \Omega_X^{i-1} \xrightarrow{d V^n} \text{gr}^n W \Omega_X^i / V^n \Omega_X^i,$$

qui précisent la suite exacte horizontale de (3.9.1).

(b) Le diagramme (3.9.1) fournit des isomorphismes

$$(3.10.3) \quad \begin{cases} Z_n \Omega_X^{i-1} / Z_{n+1} \Omega_X^{i-1} \xrightarrow{\sim} V^n \Omega_X^i \cap d V^n \Omega_X^{i-1}, \\ B_{n+1} \Omega_X^i / B_n \Omega_X^i \xrightarrow{\sim} V^n \Omega_X^i \cap d V^n \Omega_X^{i-1}. \end{cases}$$

On déduit aisément de (02.3.15) que l'isomorphisme composé des isomorphismes (3.10.3) :

$$Z_n \Omega_X^{i-1} / Z_{n+1} \Omega_X^{i-1} \xrightarrow{\sim} B_{n+1} \Omega_X^i / B_n \Omega_X^i$$

n'est autre que (02.2.6.2).

(c) L'une ou l'autre des suites exactes (3.9.1) montre à nouveau 3.7 (a).

(d) Il est immédiat que l'application $\underline{p} : \text{gr}^n W \Omega_X^i \rightarrow \text{gr}^{n+1} W \Omega_X^i$ (3.4) définit un morphisme de suites exactes

$$(3.10.4) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \Omega_X^i / B_n \Omega_X^i & \xrightarrow{V^n} & \text{gr}^n W \Omega_X^i & \rightarrow & \Omega_X^{i-1} / Z_n \Omega_X^{i-1} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow C^{-1} & & \downarrow \underline{p} & & \downarrow C^{-1} \\ 0 & \rightarrow & \Omega_X^i / B_{n+1} \Omega_X^i & \xrightarrow{V^{n+1}} & \text{gr}^{n+1} W \Omega_X^i & \rightarrow & \Omega_X^{i-1} / Z_{n+1} \Omega_X^{i-1} \rightarrow 0. \end{array}$$

Comme les flèches extrêmes sont injectives, on retrouve l'injectivité de $\underline{p}$.

C. Noyau et conoyau de F (resp. V).

PROPOSITION 3.11. — Pour tout $n \geq 0$ et tout i , on a des suites exactes

$$(3.11.1) \quad 0 \rightarrow \Omega_X^i / B_n \Omega_X^i \xrightarrow{V^n} W_{n+1} \Omega_X^i \xrightarrow{F^n} W_n \Omega_X^i,$$

$$(3.11.2) \quad 0 \rightarrow \Omega_X^{i-1} / Z_{n+1} \Omega_X^{i-1} \xrightarrow{dV^n} W_{n+1} \Omega_X^i \xrightarrow{V} W_{n+2} \Omega_X^i,$$

où les injections V^n et dV^n sont définies grâce à 3.8. Les flèches $F^n : W_{n+1} \Omega_X^i \rightarrow \Omega_X^i$ et $F^n d : W_{n+1} \Omega_X^i \rightarrow \Omega_X^{i+1}$ induisent des isomorphismes

$$(3.11.3) \quad W_{n+1} \Omega_X^i / V W_n \Omega_X^i \xrightarrow{F^n} Z_n \Omega_X^i \quad (2),$$

$$(3.11.4) \quad W_{n+1} \Omega_X^i / F W_{n+2} \Omega_X^i \xrightarrow{F^n d} B_{n+1} \Omega_X^{i+1}.$$

La projection canonique $W_{n+2} \Omega_X^i \rightarrow W_{n+1} \Omega_X^i$ s'insère dans des carrés commutatifs

$$(3.11.5) \quad \begin{array}{ccc} W_{n+2} \Omega_X^i & \xrightarrow{F^{n+1}} & Z_{n+1} \Omega_X^i \\ \downarrow & & \downarrow C \\ W_{n+1} \Omega_X^i & \xrightarrow{F^n} & Z_n \Omega_X^i \end{array}$$

$$(3.11.6) \quad \begin{array}{ccc} W_{n+2} \Omega_X^i & \xrightarrow{F^{n+1} d} & B_{n+2} \Omega_X^i \\ \downarrow & & \downarrow C \\ W_{n+1} \Omega_X^i & \xrightarrow{F^n d} & B_{n+1} \Omega_X^i, \end{array}$$

où C est l'opération de Cartier [(0 2.1.21), (0 2.2.2)].

Le fait que $FV = VF = p : W_{n+1} \Omega_X^i \rightarrow W_{n+1} \Omega_X^i$ (2.18.1) entraîne, compte tenu de (3.4.1), que l'on a

$$\text{Ker}(F) \subset \text{gr}^n W \Omega_X^i, \quad \text{Ker}(V) \subset \text{gr}^n W \Omega_X^i.$$

Comme $FV^n = V^n F$, le composé FV^n de (3.11.1) est nul. Inversement, soit $z = V^n x + dV^n y$, avec $x \in \Omega_X^i$, $y \in \Omega_X^{i-1}$, tel que $Fz = 0$. Comme $Fz = dV^{n-1} y$ (2.18.3), (3.8.2) implique que $y \in Z_n \Omega_X^{i-1}$ et que l'image de $dV^n y$ dans $\text{gr}^n W \Omega_X^i / V^n \Omega_X^i$ est nulle, donc que z est dans l'image de V^n , ce qui prouve l'exactitude de (3.11.1). D'après 2.18, l'application $V dV^n : \Omega_X^{i-1} \rightarrow W_{n+2} \Omega_X^i$ est égale à dFV^{n+2} , donc nulle. Inversement, soit $z = V^n x + dV^n y$, avec $x \in \Omega_X^i$, $y \in \Omega_X^{i-1}$, tel que $Vz = 0$. On a donc $V^{n+1} x = 0$, d'où, par

(2) L'isomorphisme (3.11.3) m'a été signalé par Raynaud.

(3.8.1), $x \in B_{n+1} \Omega_X^i$. L'exactitude de la colonne dans (3.9.1) entraîne alors que z est dans l'image de dV^n , ce qui prouve l'exactitude de (3.11.2). Il résulte de 3.3 et (2.18.3) que $F^n : W_{n+1} \Omega_X^i \rightarrow W_1 \Omega_X^i = \Omega_X^i$ a pour image $Z_n \Omega_X^i$. D'autre part, comme $FV = VF = p$, F^n s'annule sur $VW_n \Omega_X^i$. Prouvons que l'on a

$$\text{Ker}(F^n : W_{n+1} \Omega_X^i \rightarrow \Omega_X^i) = VW_n \Omega_X^i.$$

On peut supposer $n \geq 1$, le cas $n=0$ étant trivial. On a

$$\text{Ker } F^n \subset \text{Ker } p^n \stackrel{(3.4.1)}{=} \text{Fil}^1 W_{n+1} \Omega_X^i = VW_n \Omega_X^i + dVW_n \Omega_X^{i-1}.$$

Il suffit donc de prouver que, pour $1 \leq m \leq n$, on a

$$(\star) \quad (\text{Ker } F^n) \cap (VW_n \Omega_X^i + \text{Fil}^m W_{n+1} \Omega_X^i) \subset VW_n \Omega_X^i + \text{Fil}^{m+1} W_{n+1} \Omega_X^i.$$

Soit $z = Vx + dV^m y$, $x \in W_n \Omega_X^i$, $y \in W_{n+1-m} \Omega_X^{i-1}$, tel que $F^n z = 0$. D'après 2.18, on a donc $F^{n-m} dy = 0$, donc (3.3) $C^{-(n-m)} d\bar{y} = 0$, $\bar{y}$ désignant l'image de y dans Ω_X^{i-1} , donc finalement $d\bar{y} = 0$. D'après Cartier, 3.3 et 2.18, il en résulte qu'il existe (localement) $y' \in W_{n+2-m} \Omega_X^{i-1}$ tel que $y = Fy' \bmod \text{Fil}^1 W_{n+1-m} \Omega_X^{i-1}$, et que par conséquent on a $dV^m y \in VW_n \Omega_X^i + \text{Fil}^{m+1} W_{n+1} \Omega_X^i$, ce qui prouve $(\star)$, donc établit l'isomorphisme (3.11.3). D'après 3.3 et (2.18.2), $F^n d : W_{n+1} \Omega_X^i \rightarrow \Omega_X^{i+1}$ a pour image $B_{n+1} \Omega_X^{i+1}$ et s'annule sur $FW_{n+2} \Omega_X^i$. Prouvons que

$$\text{Ker}(F^n d : W_{n+1} \Omega_X^i \rightarrow \Omega_X^{i+1}) = FW_{n+2} \Omega_X^i.$$

Il suffit de montrer que, pour $m \leq n$, on a

$$(\star\star) \quad \text{Ker}(F^n d) \cap \text{Fil}^m W_{n+1} \Omega_X^i \subset FW_{n+2} \Omega_X^i + \text{Fil}^{m+1} W_{n+1} \Omega_X^i.$$

Si $z = V^m x + dV^m y$ est tel que $F^n dz = 0$, on a $F^{n-m} dx = 0$, d'où, comme précédemment, $d\bar{x} = 0$, où $\bar{x}$ est l'image de x dans Ω_X^i , ce qui permet d'écrire (localement) $x = Fx' \bmod \text{Fil}^1 W_{n+1-m}$. On a alors $V^m x = FV^m x' \bmod \text{Fil}^{m+1} W_{n+1} \Omega_X^i$, d'où $(\star\star)$ puisque $dV^m y = FdV^{m+1} y$. L'isomorphisme (3.11.4) est donc établi. Quant à la commutativité de (3.11.5) et (3.11.6), elle découle trivialement de 3.3.

Remarques 3.12. — (a) L'isomorphisme (3.11.4), pour $i=0$,

$$W_n \mathcal{O}_X / FW_n \mathcal{O}_X \xrightarrow[\simeq]{F^{n-1}d} B_n \Omega_X^1$$

coïncide avec celui défini par Serre ([66], § 7, lemme 2). Cela résulte aisément de 2.18.

(b) Le lecteur vérifiera que, grâce à (3.11.1), (3.11.2), on peut réécrire la suite exacte horizontale (resp. verticale) de (3.9.1) sous la forme

$$0 \rightarrow \text{Ker } F \rightarrow \text{Ker } p \xrightarrow{F} \text{Ker } V \rightarrow 0$$

(resp. $0 \rightarrow \text{Ker } V \rightarrow \text{Ker } p \xrightarrow{V} \text{Ker } F \rightarrow 0$), avec

$$F : W_{n+1} \Omega_X^i \rightarrow W_n \Omega_X^i, \quad p : W_{n+1} \Omega_X^i \rightarrow W_{n+1} \Omega_X^i, \quad V : W_n \Omega_X^i \rightarrow W_{n+1} \Omega_X^i$$

(resp. $V : W_{n+1} \Omega_X^i \rightarrow W_{n+2} \Omega_X^i$).

D. *Filtration canonique et filtration p-adique.*

PROPOSITION 3.13. — Pour tout $n \geq 0$, l'application $\underline{p} : \text{gr}^n W \Omega_X^\bullet \rightarrow \text{gr}^{n+1} W \Omega_X^\bullet$ définie en 3.4 est un quasi-isomorphisme.

Compte tenu de 3.4, il s'agit de prouver que $\text{gr}^{n+1} W \Omega_X^\bullet / \underline{p} \text{gr}^n W \Omega_X^\bullet$ est acyclique. Si $x \in \Omega_X^i$ est tel que $d V^{n+1} x \in p W_{n+2} \Omega_X^{i+1}$, on a $dx = F^{n+1} d V^{n+1} x = 0$, donc $x \bmod B_1 \Omega_X^i$ appartient à l'image de C^{-1} . Or d'après 2.18 et 3.3, on a $VC^{-1} = \underline{p} : \Omega_X^i \rightarrow W_2 \Omega_X^i$, et comme le carré

$$\begin{array}{ccc} \Omega_X^i & \xrightarrow{\underline{p}} & W_2 \Omega_X^i \\ \downarrow V^n & & \downarrow V^n \\ W_{n+1} \Omega_X^i & \xrightarrow{\underline{p}} & W_{n+2} \Omega_X^i \end{array}$$

est commutatif, on en déduit que $V^{n+1} x \in \underline{p} \text{gr}^n W \Omega_X^i$, ce qui prouve l'acyclicité voulue.

COROLLAIRE 3.14. — Pour tout $n \geq 0$, l'application $\underline{p}^n : \Omega_X^\bullet \rightarrow \text{gr}^n W \Omega_X^\bullet$ est un quasi-isomorphisme.

Remarque 3.14.1. — On peut aussi déduire 3.14, par localisation étale, du quasi-isomorphisme (2.21.7) [grâce à l'isomorphisme (2.20.4)].

COROLLAIRE 3.15. — Pour tout $n \geq 1$, la projection canonique

$$(3.15.1) \quad W_n \Omega_X^\bullet / p W_n \Omega_X^\bullet \rightarrow \Omega_X^\bullet = W_n \Omega_X^\bullet / \text{Fil}^1 W_n \Omega_X^\bullet$$

est un quasi-isomorphisme.

Il revient au même de prouver que la projection

$$(3.15.2) \quad W_{n+1} \Omega_X^\bullet / p W_{n+1} \Omega_X^\bullet \rightarrow W_n \Omega_X^\bullet / p W_n \Omega_X^\bullet$$

est un quasi-isomorphisme. Or le morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \text{gr}^n W \Omega_X^i & \rightarrow & W_{n+1} \Omega_X^i & \rightarrow & W_n \Omega_X^i \rightarrow 0 \\ & & \downarrow o & & \downarrow p & & \downarrow p \\ 0 & \rightarrow & \text{gr}^n W \Omega_X^i & \rightarrow & W_{n+1} \Omega_X^i & \rightarrow & W_n \Omega_X^i \rightarrow 0 \end{array}$$

fournit, d'après 3.4, la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{gr}^{n-1} W \Omega_X^i \xrightarrow{p} \text{gr}^n W \Omega_X^i \rightarrow W_{n+1} \Omega_X^i / p \rightarrow W_n \Omega_X^i / p \rightarrow 0.$$

L'assertion à prouver découle donc de 3.13.

COROLLAIRE 3.16. — *La projection canonique*

$$(3.16.1) \quad W\Omega_X^\bullet / p W\Omega_X^\bullet \rightarrow \Omega_X^\bullet$$

est un quasi-isomorphisme.

Si $U = \text{Spec}(A)$ est un ouvert affine de X , on a $\Gamma(U, W_n\Omega_X^\bullet / p W_n\Omega_X^\bullet) = W_n\Omega_A^\bullet / p W_n\Omega_A^\bullet$ (I 1.3.1), et le système projectif $W_n\Omega_A^\bullet / p W_n\Omega_A^\bullet$ est strict. Il en résulte que la flèche canonique

$$W\Omega_X^\bullet / p W\Omega_X^\bullet \rightarrow \varprojlim W_n\Omega_X^\bullet / p W_n\Omega_X^\bullet$$

est un isomorphisme. Le système projectif $H^i(W_n\Omega_X^\bullet / p W_n\Omega_X^\bullet)$ étant essentiellement constant, on a $\varprojlim H^i = 0$ pour $q > 0$, d'où 3.16. Plus généralement :

COROLLAIRE 3.17. — *Pour tout $n \geq 0$, les flèches naturelles de pro-objets*

$$(3.17.1) \quad p^n W_n\Omega_X^\bullet \rightarrow \text{Fil}^n W_n\Omega_X^\bullet,$$

$$(3.17.2) \quad W_n\Omega_X^\bullet / p^n W_n\Omega_X^\bullet \rightarrow W_n\Omega_X^\bullet$$

sont des quasi-isomorphismes (i.e. induisent des isomorphismes sur les pro-objets de cohomologie), et la flèche canonique

$$(3.17.3) \quad W\Omega_X^\bullet / p^n W\Omega_X^\bullet \rightarrow W_n\Omega_X^\bullet$$

est un quasi-isomorphisme.

Comme $\text{Fil}^0 W_n\Omega_X^\bullet = W_n\Omega_X^\bullet$, il revient au même de prouver que (3.17.1) ou (3.17.2) est un quasi-isomorphisme, ou encore que la flèche

$$(\star) \quad p^n W_n\Omega_X^\bullet / p^{n+1} W_n\Omega_X^\bullet \rightarrow \text{gr}^n W_n\Omega_X^\bullet$$

est un quasi-isomorphisme (de pro-objets). Or, dans le carré commutatif

$$(3.15.1) \quad \begin{array}{ccc} W_n\Omega_X^\bullet / p W_n\Omega_X^\bullet & \xrightarrow{p^n} & p^n W_n\Omega_X^\bullet / p^{n+1} W_n\Omega_X^\bullet \\ (3.15.1) \downarrow & & \downarrow (\star) \\ \Omega_X^\bullet & \xrightarrow{p^n} & \text{gr}^n W_n\Omega_X^\bullet \end{array}$$

la flèche horizontale est un isomorphisme de pro-objets (3.5), donc d'après 3.14 et 3.15 la flèche $(\star)$ est un quasi-isomorphisme. On en déduit comme en 3.16 que (3.17.3) est un quasi-isomorphisme.

PROPOSITION 3.18. — *Pour tout $n \geq 1$ et tout i , la projection canonique $W_n\Omega_X^i \rightarrow \Omega_X^i$ donne une suite exacte*

$$(3.18.1) \quad 0 \rightarrow VW_{n-1}\Omega_X^{i-1} / p W_n\Omega_X^{i-1} \xrightarrow{d} W_n\Omega_X^i / VW_{n-1}\Omega_X^i \rightarrow \Omega_X^i \rightarrow 0.$$

Le seul point non évident est l'injectivité de d . Si $dVx = Vy$, avec $x \in W_{n-1}\Omega_X^{i-1}$, $y \in W_{n-1}\Omega_X^i$, on en déduit $dx = FdVx = FVy = py$. Si $\bar{x}$ est l'image de x dans $\Omega_X^{i-1}/B_1\Omega_X^{i-1}$, on a donc (localement) $\bar{x} = C^{-1}\bar{z}$, pour $\bar{z} \in \Omega_X^{i-1}$. Soit $z \in W_n\Omega_X^i$ relevant $\bar{z}$. D'après 3.3 et 3.15, on a donc $Fz = x \bmod pW_{n-1}\Omega_X^{i-1} + dW_{n-1}\Omega_X^{i-2}$, donc $Vx \in pW_n\Omega_X^i$, ce qui prouve l'injectivité de d .

COROLLAIRE 3.19. — La projection $W_n\Omega_X^i \rightarrow \Omega_X^i$ donne une suite exacte de pro-objets

$$(3.19.1) \quad 0 \rightarrow W_n\Omega_X^{i-1}/FW_n\Omega_X^{i-1} \xrightarrow{dV} W_n\Omega_X^i/VW_n\Omega_X^i \rightarrow \Omega_X^i \rightarrow 0.$$

En effet, d'après (3.5.1), V donne un isomorphisme de pro-objets

$$W_n\Omega_X^{i-1}/FW_n\Omega_X^{i-1} \rightarrow VW_n\Omega_X^{i-1}/pW_n\Omega_X^{i-1}.$$

Remarques 3.19.2. — (a) Par les isomorphismes (3.11.3), (3.11.4), la suite exacte (3.19.1) s'identifie à la suite exacte $0 \rightarrow B_n\Omega_X^i \rightarrow Z_n\Omega_X^i \xrightarrow{C} \Omega_X^i \rightarrow 0$, où les flèches de transitions sont données par C sur $Z_n\Omega_X^i$, $B_n\Omega_X^i$, et l'identité sur Ω_X^i . On a en effet un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} W_{n-1}\Omega_X^{i-1}/F & \xrightarrow{dV} & W_n\Omega_X^i/V \rightarrow \Omega_X^i \\ \downarrow F^{n-2}d \simeq & & \downarrow F^{n-1} \simeq \parallel \\ B_{n-1}\Omega_X^i & \longrightarrow & Z_{n-1}\Omega_X^i \xrightarrow{C^{n-1}} \Omega_X^i. \end{array}$$

(b) Si $U = \text{Spec}(A)$ est un ouvert affine de X , on a $\Gamma(U, B_n\Omega_X^i) = B_n\Omega_A^i$ et le système projectif $B_n\Omega_A^i$ est strict. Il en résulte que la limite projective de (3.19.1) est une suite exacte, qui, compte tenu de (3.6.2), s'écrit :

$$(3.19.2.1) \quad 0 \rightarrow W\Omega_X^{i-1}/FW\Omega_X^{i-1} \xrightarrow{dV} W\Omega_X^i/VW\Omega_X^i \rightarrow \Omega_X^i \rightarrow 0.$$

Le résultat suivant raffine 3.15 :

COROLLAIRE 3.20. — Pour tout $n \geq 1$ et tout i , (3.15.1) induit un quasi-isomorphisme

$$(3.20.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow W_n\mathcal{O}_X/p & \xrightarrow{d} & W_n\Omega_X^1/p & \rightarrow \dots & \rightarrow W_n\Omega_X^{i-1}/p & \xrightarrow{d} & W_n\Omega_X^i/VW_{n-1}\Omega_X^i \rightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \rightarrow \mathcal{O}_X & \xrightarrow{d} & \Omega_X^1 & \rightarrow \dots & \xrightarrow{d} & \Omega_X^{i-1} & \xrightarrow{d} \Omega_X^i \rightarrow 0. \end{array}$$

Notons M_i (resp. $\Omega_X^{\leq i}$) la ligne supérieure (resp. inférieure) de (3.20.1). La projection (3.15.1) donne un morphisme de suites exactes de complexes

$$(\star) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow N_i[-i] & \rightarrow & M_i & \rightarrow & M_{i-1} & \rightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \rightarrow \Omega_X^i[-i] & \rightarrow & \Omega_X^{\leq i} & \rightarrow & \Omega_X^{\leq i-1} & \rightarrow & 0, \end{array}$$

où

$$N_i = (0 \rightarrow VW_{n-1} \Omega_X^{i-1} / p W_n \Omega_X^{i-1} \xrightarrow{d} W_n \Omega_X^i / VW_{n-1} \Omega_X^i \rightarrow 0)$$

avec $W_n \Omega_X^i / V$ placé en degré 0. Pour i supérieur à la dimension relative de X (qu'on peut supposer bornée), (3.20.1) est un quasi-isomorphisme en vertu de 3.7 (a) et 3.15. D'autre part, la flèche verticale de gauche de $(\star)$ est un quasi-isomorphisme d'après 3.18. Par récurrence descendante sur i , on en conclut que (3.20.1) est un quasi-isomorphisme.

E. Cycles de $W_n \Omega_X^\bullet$.

PROPOSITION 3.21. — Pour tout $n \geq 1$ et tout i , on a

$$\text{Ker}(d : W_n \Omega_X^i \rightarrow W_n \Omega_X^{i+1}) = F^n W_{2n} \Omega_X^i.$$

Comme $d F^n = p^n F^n d$ (2.18.2), on a $F^n W_{2n} \Omega_X^i \subset \text{Ker } d$. Inversement, soit $x \in W_n \Omega_X^i$ tel que $dx = 0$. Supposons prouvé que $x \in F^r W_{n+r} \Omega_X^i$, avec $r < n$. On peut donc écrire (localement) $x = F^r y$, $y \in W_{n+r} \Omega_X^i$, et $dx = p^r F^r dy = 0$, donc (3.4.1) $F^r dy \in \text{Fil}^{n-r} W_n \Omega_X^{i+1}$, et a fortiori $F^r dy \in \text{Fil}^1 W_n \Omega_X^{i+1}$ puisque $r < n$. Si $\bar{y}$ est l'image de y dans Ω_X^i , on en déduit que $C^{-r} d\bar{y} = 0$, donc $d\bar{y} = 0$. Grâce à 3.15 il en résulte que l'on peut écrire localement $y = F u + p v + d w$, avec $u \in W_{n+r+1} \Omega_X^i$, $v \in W_{n+r} \Omega_X^i$, $w \in W_{n+r} \Omega_X^{i-1}$. Donc $y = F(u + V v + d V w)$, et par suite $x \in F^{r+1} W_{n+r+1} \Omega_X^i$. La proposition en résulte.

Remarques 3.21.1. — Par un argument analogue, on peut montrer que l'on a, plus généralement, pour tout $n \geq 1$, tout $k \geq 0$ et tout i :

$$(3.21.1.1) \quad \text{Ker}(F^k d : W_{n+k} \Omega_X^i \rightarrow W_n \Omega_X^{i+1}) = F^n W_{2n+k} \Omega_X^i.$$

Il en résulte facilement que l'on a

$$(3.21.1.2) \quad \text{Ker}(F^k : W_{n+k} \Omega_X^i \rightarrow W_n \Omega_X^i) = V^n W_k \Omega_X^i,$$

ce qui généralise (3.11.1) et (3.11.3).

On vérifie également que l'on a, pour tout $n \geq 1$, tout $k \geq 0$ et tout i :

$$(3.21.1.3) \quad \text{Ker}(d V^k : W_n \Omega_X^i \rightarrow W_{n+k} \Omega_X^{i+1}) = F^{n+k} W_{2n+k} \Omega_X^i,$$

$$(3.21.1.4) \quad \text{Ker}(V^k : W_n \Omega_X^i \rightarrow W_{n+k} \Omega_X^i) = F^k d V^n W_k \Omega_X^{i-1},$$

généralisant 3.8 et (3.11.2).

D'autre part, le fait que la projection $W \Omega_X^\bullet / p^n W \Omega_X^\bullet \rightarrow W_n \Omega_X^\bullet$ soit un quasi-isomorphisme entraîne, compte tenu de 3.21, de la surjectivité de $W \Omega_X^\bullet \rightarrow W_m \Omega_X^\bullet$ et des relations $p^n = F^n V^n$, $d = F^n d V^n$, que l'on a

$$(3.21.1.5) \quad d^{-1}(p^n W \Omega_X^{i+1}) = F^n W \Omega_X^i,$$

pour tout $n \geq 0$ et tout i . Il s'agit, en un sens, d'une variante universelle de (02.3.13).

COROLLAIRE 3.22. — *F induit un automorphisme du pro-objet*

$$ZW.\Omega_X^i \stackrel{\text{dfn}}{=} \text{Ker}(d : W.\Omega_X^i \rightarrow W.\Omega_X^{i+1}).$$

Comme $dF = pF d$, F induit un endomorphisme de $ZW.\Omega_X^i$, qui est injectif d'après 3.5. D'autre part, 3.21 entraîne que $ZW.\Omega_X^i$ est isomorphe au pro-objet défini par le système projectif double $F^n W_{n+m} \Omega_X^i ((n, m) \in \mathbb{Z}^2)$, dont F est un endomorphisme surjectif, d'où le corollaire.

Si X est de dimension relative N , on retrouve en particulier que F induit un automorphisme du pro-objet $W.\Omega_X^N$ [3.7 (b)].

F. Points fixes de F (voir aussi 5.7).

3.23. Pour $n \geq 1$, notons

$$(3.23.1) \quad d \log : \mathcal{O}_X^* \rightarrow W_n \Omega_X^1,$$

l'homomorphisme de faisceaux abéliens défini par $x \mapsto d\underline{x}/\underline{x}$, où $\underline{x} = (x, 0, 0, \dots)$ est le représentant multiplicatif de x dans $W_n \mathcal{O}_X$. Pour n variable, les applications (3.23.1) forment un homomorphisme du système projectif constant $\mathcal{O}_X^*$ dans le système projectif $W.\Omega_X^1$.

PROPOSITION 3.23.2. — *Pour tout $n \geq 1$, la suite*

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X^{*p^n} \rightarrow \mathcal{O}_X^* \xrightarrow{d \log} W_n \Omega_X^1$$

est exacte.

Comme $p^n W_n \Omega_X^1 = 0$, on a $d \log (\mathcal{O}_X^{*p^n}) = 0$. Inversement, soit $x \in \mathcal{O}_X^*$ tel que $d \log x = 0$. Supposons qu'on puisse écrire (localement) $x = y^{p^m}$, $y \in \mathcal{O}_X^*$, pour un m tel que $0 \leq m < n$. On a alors $d \log x = p^m d \log y = 0$, donc (3.4.1) $d \log y \in \text{Fil}^{n-m} W_n \Omega_X^1 \subset \text{Fil}^1 W_n \Omega_X^1$, et par suite l'image de $d \log y$ dans Ω_X^1 est nulle. Il en résulte que $y \in \mathcal{O}_X^{*p}$, donc $x \in \mathcal{O}_X^{*p^{m+1}}$, d'où la proposition.

COROLLAIRE 3.23.3. — *Pour tout $n \geq 0$, on a*

$$d \log (\mathcal{O}_X^*) \cap \text{Fil}^n W.\Omega_X^1 = p^n d \log (\mathcal{O}_X^*).$$

PROPOSITION 3.24 (cf. [12], II 7.5.2). — *Pour tout $n \geq 1$ et tout m tel que $0 \leq m \leq n$, on a*

$$(3.24.1) \quad \text{Ker}(1 - F : \text{Fil}^m W_{n+1} \Omega_X^1 \rightarrow W_n \Omega_X^1) \subset p^m d \log (\mathcal{O}_X^*) + \text{Fil}^n W_{n+1} \Omega_X^1.$$

où $1 : W_{n+1} \Omega_X^1 \rightarrow W_n \Omega_X^1$ désigne (par abus) la projection canonique.

D'après 2.17, le composé $(1 - F) d \log : \mathcal{O}_X^* \rightarrow W_n \Omega_X^1$ est nul. Il suffit donc de prouver que, pour $m < n$, on a

$$(3.24.2) \quad \text{Ker}(1 - F : \text{Fil}^m W_{n+1} \Omega_X^1 \rightarrow W_n \Omega_X^1) \subset p^m d \log (\mathcal{O}_X^*) + \text{Fil}^{m+1} W_{n+1} \Omega_X^1.$$

La démonstration qui suit est une simple traduction de celle donnée dans [12], *loc. cit.* Supposons d'abord $m = 0$, et soit $x \in W_{n+1} \Omega_X^1$ tel que $F x = x$. D'après 3.3, il en résulte que,

si $\bar{x}$ est l'image de x dans Ω_X^1 , on a $C^{-1}\bar{x} = \bar{x}$ dans $\Omega_X^1/B_1\Omega_X^1$, donc, en vertu de (0.2.1.25), il existe (localement) $a \in \mathcal{O}_X^*$ tel que $\bar{x} = d \log a$, i.e. $x = \underline{da}/a \bmod \text{Fil}^1 W_{n+1}\Omega_X^1$. Donc (3.24.2) est vrai pour $m=0$. Supposons $m \geq 1$, et soit $x = V^m y + dV^m z$, $y \in W_{n+1-m}\Omega_X^1$, $z \in W_{n+1-m}\mathcal{O}_X$, tels que $Fx = x$ (cf. 3.2). Grâce à 2.18, l'image de $dV^{m-1}z$ dans $\text{gr}^{m-1}W\Omega_X^1$ est alors nulle, donc (3.8.2) il existe (localement) $u \in \mathcal{O}_X$ tel que $z = \underline{u}^{p^m} \bmod \text{Fil}^1$. Par suite, $x = V^m y + p^m \underline{du} \bmod \text{Fil}^{m+1}$, donc, en changeant les notations, on peut supposer x écrit sous la forme $x = V^m y + dV^{m+1}z$, $y \in W_{n+1-m}\Omega_X^1$, $z \in W_{n-m}\mathcal{O}_X$. L'égalité $Fx - x = 0$ dans $\text{gr}^m W\Omega_X^1$ entraîne

$$(\star) \quad -V^m(Fy - y) = dV^m z \bmod \text{Fil}^{m+1}.$$

D'après (3.8.2), il existe donc (localement) $b \in W\mathcal{O}_X$ tel que $z = b^{p^m} \bmod VW\mathcal{O}_X$, et par suite $dV^m z = p^m db \bmod \text{Fil}^{m+1}$. La relation $(\star)$ se réécrit

$$V^m(Fy - y + F^m db) = 0 \bmod \text{Fil}^{m+1}.$$

Donc, d'après (3.8.1), l'image de $Fy - y + F^m db$ dans Ω_X^1 appartient à $B_m\Omega_X^1$. Or l'image de $F^m db$ dans Ω_X^1 appartient à $B_{m+1}\Omega_X^1$ [3.3 et (0.2.2.2)]. Par suite, si $\bar{y}$ est l'image de y dans $\Omega_X^1/B_m\Omega_X^1$, on a $C^{-1}\bar{y} - \bar{y} = 0$ dans $\Omega_X^1/B_{m+1}\Omega_X^1$, donc, en vertu de (0.2.2.9), il existe localement $a \in \mathcal{O}_X^*$ tel que $\bar{y} = d \log a$, donc (3.8.1) :

$$V^m y = V^m(\underline{da}/a) \bmod \text{Fil}^{m+1} = p^m \underline{da}/a \bmod \text{Fil}^{m+1}$$

et finalement $x = p^m d \log a \bmod \text{Fil}^{m+1}$, ce qui prouve (3.24.2), donc 3.24.

Remarque 3.25. — Par un argument analogue, on voit que, pour tout $n \geq 0$ et tout m tel que $0 \leq m \leq n$, on a aussi

$$(3.25.1) \quad \text{Ker}(1 - F : \text{Fil}^m W_{n+1}\Omega_X^1 \rightarrow W_{n+1}\Omega_X^1/dV^n\mathcal{O}_X) \subset p^m d \log(\mathcal{O}_X^*) + \text{Fil}^n W_{n+1}\Omega_X^1,$$

où F (resp. 1) : $W_{n+1}\Omega_X^1 \rightarrow W_{n+1}\Omega_X^1/dV^n\mathcal{O}_X$ est l'application (3.3.1) (resp. la projection canonique).

PROPOSITION 3.26. — *Pour tout $n \geq 1$ et tout i , l'application*

$$(3.26.1) \quad 1 - F : W_{n+1}\Omega_X^i \rightarrow W_n\Omega_X^i$$

(où 1 désigne la projection canonique) est surjective pour la topologie étale.

Pour $x \in W_n\Omega_X^{i-1}$, on a

$$dx = FdVx - dVx + FdV^2x - dV^2x + \dots = (F-1)(dVx + \dots + dV^n x),$$

donc l'image de $1-F$, pour la topologie de Zariski, contient $dW_n\Omega_X^{i-1}$. Il suffit donc de prouver que, pour $m < n$, $V^m W_{n-m}\Omega_X^i$ est contenu, mod Fil^{m+1} , dans l'image de $1-F$ pour la topologie étale. Comme l'application $1-C^{-1} : \Omega_X^i/B_{m-1}\Omega_X^i \rightarrow \Omega_X^i/B_m\Omega_X^i$ est surjective pour la topologie étale (0.2.2.9), la conclusion découle de 3.3 et 3.8.

Mettant ensemble 3.23.2, 3.24 pour $m=0$, et 3.26, on obtient :

COROLLAIRE 3.27 (cf. [12], II 7.5.1). — *La suite de pro-objets*

$$(3.27.1) \quad 0 \rightarrow \mathcal{O}_X^* / \mathcal{O}_X^{*p} \xrightarrow{d \log} W_* \Omega_X^1 \xrightarrow{1-F} W_* \Omega_X^1 \rightarrow 0$$

est exacte pour la topologie étale.

Pour une référence ultérieure, rappelons d'autre part le résultat élémentaire suivant :

PROPOSITION 3.28. — *Pour tout $n \geq 1$, la suite*

$$(3.28.1) \quad 0 \rightarrow (\mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})_X \rightarrow W_n \mathcal{O}_X \xrightarrow{1-F} W_n \mathcal{O}_X$$

est exacte (et $1-F$ est surjectif pour la topologie étale).

Le raffinement suivant de 3.27, 3.28 nous sera également utile :

COROLLAIRE 3.29. — *On a des suites exactes, pour la topologie étale, de complexes de pro-objets*

$$(3.29.1) \quad 0 \rightarrow (\mathbb{Z}/p^* \mathbb{Z})_X \rightarrow W_* \Omega_X^* \xrightarrow{1-F} W_* \Omega_X^* \rightarrow 0,$$

$$(3.29.2) \quad 0 \rightarrow (\mathcal{O}_X^* / \mathcal{O}_X^{*p})[-1] \xrightarrow{d \log} W_* \Omega_X^{\geq 1} \xrightarrow{1-F'} W_* \Omega_X^{\geq 1} \rightarrow 0,$$

où $W_* \Omega_X^{\geq 1}$ est le tronqué naïf $0 \rightarrow W_* \Omega_X^1 \rightarrow W_* \Omega_X^2 \rightarrow \dots$ (avec $W_* \Omega_X^1$ en degré 1), et F' est l'endomorphisme de $W_* \Omega_X^{\geq 1}$ défini par $p^{i-1} F$ en degré i .

Compte tenu de 3.27, 3.28, il suffit de prouver le :

LEMME 3.30. — *Pour tout $r \geq 1$ et tout i , $1-p^r F$ est un automorphisme du pro-objet $W_* \Omega_X^i$.*

La multiplication par p^r dans $W_* \Omega_X^i$ envoie $\text{Fil}^n W_* \Omega_X^i$ dans $\text{Fil}^{n+1} W_* \Omega_X^i$ donc induit un homomorphisme $\underline{p}^r : W_n \Omega_X^i \rightarrow W_{n+1} \Omega_X^i$ (cf. 3.4), et il est clair que le carré

$$\begin{array}{ccc} W_n \Omega_X^i & \xrightarrow{\underline{p}^r} & W_{n+1} \Omega_X^i \\ \downarrow F & & \downarrow F \\ W_{n-1} \Omega_X^i & \xrightarrow{\underline{p}^r} & W_n \Omega_X^i \end{array}$$

est commutatif. L'endomorphisme $\underline{p}^r F = F \underline{p}^r$ de $W_n \Omega_X^i$ vérifie donc $(\underline{p}^r F)^n = 0$, et par suite $1 - \underline{p}^r F$ est un automorphisme de $W_n \Omega_X^i$ (d'inverse $\sum_{m \geq 0} (\underline{p}^r F)^m$). Le lemme en résulte, puisque $1 - \underline{p}^r F : W_n \Omega_X^i \rightarrow W_{n-1} \Omega_X^i$ est composé de $1 - \underline{p}^r F$ et de la projection $W_n \Omega_X^i \rightarrow W_{n-1} \Omega_X^i$.

G. Complément sur la filtration canonique. — Le résultat ci-après ne sera pas utilisé dans la suite de cet article, mais jouera un rôle important dans [37].

PROPOSITION 3.31. — *Avec la notation (3.1.2), on a, pour tout $n \geq 0$:*

$$\text{Fil}^n W_* \Omega_X^* = V^n W_* \Omega_X^* + dV^n W_* \Omega_X^{*-1}$$

Le composé de $V^n : W_* \Omega_X^\bullet \rightarrow W_{*+n} \Omega_X^\bullet$ et de la projection $W_{*+n} \Omega_X^\bullet \rightarrow W_* \Omega_X^\bullet$ étant nul, on a $V^n W_* \Omega_X^\bullet \subset \text{Fil}^n W_* \Omega_X^\bullet$, et comme $\text{Fil}^n W_* \Omega_X^\bullet$ est un idéal différentiel gradué, on en déduit une inclusion

$$(1) \quad \text{Fil}^n W_* \Omega_X^\bullet \subset \text{Fil}^n W_* \Omega_X^\bullet,$$

où $\text{Fil}^n W_* \Omega_X^\bullet = V^n W_* \Omega_X^\bullet + dV^n \Omega_X^{i-1}$. Celle-ci étant une égalité pour $n=0$, il suffit de prouver qu'elle induit un isomorphisme sur les gradués associés. D'après (3.19.2.1), $\text{gr}^0(1)$ est un isomorphisme. Il s'ensuit que V^n et dV^n définissent, par passage au quotient, des flèches

$$\begin{aligned} V^n : \Omega_X^i &\rightarrow W \Omega_X^i / \text{Fil}^{n+1} W \Omega_X^i, \\ dV^n : \Omega_X^{i-1} &\rightarrow W \Omega_X^i / V^n W \Omega_X^i + dV^{n+1} W \Omega_X^{i-1}. \end{aligned}$$

Compte tenu de la structure du gradué associé à la filtration canonique (3.8, 3.9), $\text{gr}^n(1)$ sera un isomorphisme si l'on montre que l'on a

$$(2) \quad \text{Ker } V^n = B_n \Omega_X^i,$$

$$(3) \quad \text{Ker } dV^n = Z_n \Omega_X^{i-1}.$$

Soient $x, y \in W \Omega_X^i, z \in W \Omega_X^{i-1}$ tels que $V^n x = V^{n+1} y + dV^{n+1} z$. On en déduit $p^n(Fx - py) = dz$, donc, d'après (3.21.1.5), il existe (localement) $t \in W \Omega_X^{i-1}$ tel que $z = F^n t$. Par suite, $x = Vy + F^n dVz$, d'où (2), grâce à (3.11.4). De manière analogue, si $x, z \in W \Omega_X^{i-1}, y \in W \Omega_W^i$ sont tels que $dV^n x = V^n y + dV^{n+1} z$, on en tire $d(x - Vz) = p^n y$, donc (3.21.1.5) il existe (localement) $t \in W \Omega_X^{i-1}$ tel que $x - Vz = F^n t$, d'où (3), grâce à (3.11.3), ce qui achève la démonstration.

Remarque 3.32. — On a vu (3.6) que $V^n W \Omega_X^i$ est fermé dans $W \Omega_X^i$ pour la topologie canonique (3.1). En revanche, $dV^n W \Omega_X^{i-1}$ n'est pas en général fermé : par exemple, si $A = \mathbb{F}_p[T]$, l'élément $\sum_{n=0}^{\infty} p^n T^{p^n} dT/T$ de $W \Omega_A^1$ (cf. 2.16.1) est adhérent à dWA , mais n'appartient pas à dWA , comme on le vérifie aisément.

4. TORSION DU COMPLEXE DE DE RHAM DE $W \mathcal{O}_X$. — Sauf mention du contraire, S désigne un schéma parfait de car. p , et $f : X \rightarrow S$ un morphisme lisse.

4.1. Notons $\Omega_{W \mathcal{O}_X}^\bullet = \Omega_{W \mathcal{O}_X / f^{-1} W \mathcal{O}_S}^\bullet$ le complexe de De Rham de la $f^{-1} W \mathcal{O}_S$ -algèbre $W \mathcal{O}_X$ (03.1.1). Pour $n \geq 0$, notons

$$(4.1.1) \quad \text{Fil}^n \Omega_{W \mathcal{O}_X}^\bullet \subset \Omega_{W \mathcal{O}_X}^\bullet$$

le noyau de la projection naturelle $\Omega_{W \mathcal{O}_X}^\bullet \rightarrow \Omega_{W_n \mathcal{O}_X}^\bullet = \Omega_{W_n \mathcal{O}_X / f^{-1} W_n \mathcal{O}_S}^\bullet$, i.e. l'idéal différentiel gradué engendré par $V^n W \mathcal{O}_X$. Désignons d'autre part par

$$(4.1.2) \quad T \subset \Omega_{W \mathcal{O}_X}^\bullet,$$

l'idéal différentiel gradué formé des éléments de p -torsion.

On a un homomorphisme canonique d'adg :

$$(4.1.3) \quad \Omega_{W\mathcal{O}_X}^\bullet \rightarrow W\Omega_X^\bullet$$

défini par l'identité en degré 0.

THÉORÈME 4.2. — *L'homomorphisme (4.1.3) induit, pour tout $n \geq 0$, un isomorphisme*

$$(4.2.1) \quad \Omega_{W\mathcal{O}_X}^\bullet / (T + \text{Fil}^n \Omega_{W\mathcal{O}_X}^\bullet) \xrightarrow{\sim} W_n \Omega_X^\bullet.$$

La démonstration nécessite quelques préliminaires.

LEMME 4.3. — *Soit F l'endomorphisme de $\Omega_{W\mathcal{O}_X}^\bullet$ défini par F en degré 0. On a $F(T) \subset T$, et $F^{-1}(T) \subset T$.*

La première inclusion est triviale. D'autre part, l'injection naturelle

$$\Omega_{W\mathcal{O}_X}^\bullet / T \hookrightarrow \Omega_{W\mathcal{O}_X}^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$$

est compatible aux endomorphismes F et $F \otimes 1$. Or

$$\Omega_{W\mathcal{O}_X}^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = \Omega_{(W\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p) / (f^{-1} W\mathcal{O}_S \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p)}^\bullet,$$

et les endomorphismes $F \otimes 1$ de $W\mathcal{O}_X \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ et $f^{-1} W\mathcal{O}_S \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ sont des automorphismes (d'inverses $V \otimes p^{-1}$). L'endomorphisme $F \otimes 1$ de $\Omega_{W\mathcal{O}_X}^\bullet \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ est donc un automorphisme, donc l'endomorphisme F de $\Omega_{W\mathcal{O}_X}^\bullet / T$ est injectif, ce qui prouve 4.3.

LEMME 4.4. — (a) *L'endomorphisme F de $W\mathcal{O}_X$ se prolonge de manière unique en un endomorphisme d'algèbres graduées F de $\Omega_{W\mathcal{O}_X}^\bullet / T$ tel que $dF = pFd$.*

(b) *Il existe un unique homomorphisme $V : \Omega_{W\mathcal{O}_X}^\bullet / T \rightarrow \Omega_{W\mathcal{O}_X}^\bullet / T$ tel que $FV = VF = p$, où F est l'endomorphisme défini en (a).*

(c) *On a*

$$(4.4.1) \quad Fdx = x^{p-1}dx + d\alpha(x),$$

quel que soit $x \in W\mathcal{O}_X$, α étant l'application définie en (0 1.4.6), et

$$(4.4.2) \quad xVy = V(Fx, y),$$

$$(4.4.3) \quad V(xdy) = VxdVy,$$

quels que soient $x, y \in \Omega_{W\mathcal{O}_X}^\bullet / T$.

La formule $Fx = x^p + p\alpha(x)$ pour $x \in W\mathcal{O}_X$ (0 1.4.6) entraîne que l'on a, pour tout $i \geq 0$, $F(\Omega_{W\mathcal{O}_X}^i) \subset p^i \Omega_{W\mathcal{O}_X}^i$. Il existe donc un endomorphisme F de $\Omega_{W\mathcal{O}_X}^i / T$ tel que $p^i F = F$. Il est

immédiat que l'on a $dF = p F d$, et que $F(xy) = Fx Fy$ quels que soient $x, y \in \Omega_{W\mathcal{O}_X}^\bullet/T$. Cela prouve l'assertion d'existence de (a). L'unicité est claire. L'assertion d'unicité dans (b) est évidente. Pour l'existence, il suffit de noter que, pour $i \geq 0$, on a $p^{i+1} \Omega_{W\mathcal{O}_X}^i \subset F(\Omega_{W\mathcal{O}_X}^i)$, comme le montre la formule

$$p^{i+1} dx_1 \dots dx_i = F(V ad V x_1 \dots dV x_i)$$

pour $a, x_1, \dots, x_i \in W\mathcal{O}_X$. Les formules (4.4.1), (4.4.2), (4.4.3) sont immédiates.

LEMME 4.5. — Posons $\Omega_{W\mathcal{O}_X}^\bullet/T = M$, et, pour $n \geq 0$, notons $\text{Fil}^n M$ l'image de $\text{Fil}^n \Omega_{W\mathcal{O}_X}^\bullet$ dans M , i.e. $\text{Fil}^n M = (T + \text{Fil}^n \Omega_{W\mathcal{O}_X}^\bullet)/T$. On a $V(\text{Fil}^n M) \subset \text{Fil}^{n+1} M$, et le système projectif $(M_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, où $M_n = 0$ pour $n \leq 0$ et $M_n = M/\text{Fil}^n M$ pour $n \geq 0$, muni des applications $V : M_n \rightarrow M_{n+1}$ induites par l'endomorphisme V de M , est un V -pro-complexe de DR sur X (1.1).

La formule (4.4.3) entraîne $V(\text{Fil}^n M) \subset \text{Fil}^{n+1} M$ et $V^2(1.1)$. La condition $V1$ est trivialement vérifiée (car $W\mathcal{O}_X$ est sans p -torsion). La relation $dF = p F d$, jointe à $FV = p$, implique $F dV = d$, donc $F(\text{Fil}^{n+1} M) \subset \text{Fil}^n M$, et par suite F induit $F : M_{n+1} \rightarrow M_n$. De (4.4.1) on déduit $F d\underline{a} = \underline{a}^{p-1} d\underline{a}$ pour $a \in \mathcal{O}_X$, donc $F d\underline{a}_{\leq n} = \underline{a}_{\leq n-1}^{p-1} d\underline{a}_{\leq n-1}$ [avec la notation $\underline{a}_{\leq n}$ de 2.17 (a)], et $V3$ en résulte, compte tenu de (4.4.2) et (4.4.3); le lemme est donc démontré.

Preuve de 4.2. — Comme $W\Omega_X^\bullet$ est sans p -torsion (3.6), la flèche (4.1.3) s'annule sur T , donc fournit (4.2.1). D'autre part, comme $M_\bullet$ est un V -pro-complexe de DR, il existe une unique flèche [de $VDR(X)] \varepsilon : W\Omega_X^\bullet \rightarrow M_\bullet$ induisant l'identité en degré 0. Les composés de (4.2.1) et ε dans les deux sens sont l'identité en degré 0, donc, comme M_n et $W_n\Omega_X^\bullet$ sont quotients de $\Omega_{W_n\mathcal{O}_X}^\bullet$, les flèches (4.2.1) et ε sont inverses l'une de l'autre, ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 4.6. — Posons

$$(4.6.1) \quad \Omega_{W\mathcal{O}_X}^{\bullet\wedge} = \varprojlim \Omega_{W\mathcal{O}_X}^\bullet / \text{Fil}^n \Omega_{W\mathcal{O}_X}^\bullet = \varprojlim \Omega_{W_n\mathcal{O}_X}^\bullet.$$

Notons T' l'idéal différentiel gradué de $\Omega_{W\mathcal{O}_X}^{\bullet\wedge}$ formé des éléments de p -torsion. La flèche canonique

$$(4.6.2) \quad \Omega_{W\mathcal{O}_X}^{\bullet\wedge} \rightarrow \Omega_X^\bullet,$$

limite projective des flèches $\pi_n : \Omega_{W_n\mathcal{O}_X}^\bullet \rightarrow W_n\Omega_X^\bullet$ (1.3), induit, pour tout $n \geq 0$, un isomorphisme

$$(4.6.3) \quad \Omega_{W\mathcal{O}_X}^{\bullet\wedge} / (T' + \text{Fil}^n(\Omega_{W\mathcal{O}_X}^{\bullet\wedge})) \rightarrow W_n\Omega_X^\bullet,$$

donc un isomorphisme

$$(4.6.4) \quad \Omega_{W\mathcal{O}_X}^{\bullet\wedge} / \overline{T}' \xrightarrow{\sim} W\Omega_X^\bullet,$$

où $\overline{T}' = \varprojlim (T' + \text{Fil}^n) / \text{Fil}^n$.

Comme $W\Omega_X^\bullet$ est sans p -torsion (3.6), (4.6.2) s'annule sur T' , donc fournit (4.6.3). Il est immédiat que (4.6.3) est inverse de la flèche naturelle

$$\Omega_{W\mathcal{O}_X}^\bullet / (T + \text{Fil}^n) \rightarrow \Omega_{W\mathcal{O}_X}^{\bullet, \wedge} / (T' + \text{Fil}^{n, \wedge}),$$

où le premier membre est identifié à $W_n\Omega_X^\bullet$ par (4.2.1).

Exemple 4.7. Soit $X = \text{Spec}(\mathbb{F}_p[x])$, où x est une indéterminée. Le lecteur vérifiera que, pour $n \geq 1$, les éléments $(V^n x)dx - p^n x dV^n x$ de $\Omega_{W\mathcal{O}_X}^{1, \wedge}$ sont des éléments non nuls de $\overline{T}'$ (cf. Lubkin [46]).

Le résultat suivant complète 4.6 et précise le lien entre notre construction et celle de Lubkin [46].

THÉORÈME 4.8. — Soit F l'endomorphisme de $\Omega_{W\mathcal{O}_X}^{\bullet, \wedge}$ limite projective des endomorphismes F de $\Omega_{W_n\mathcal{O}_X}^\bullet$ donnés par F en degré 0. Notons N' l'idéal différentiel gradué de $\Omega_{W\mathcal{O}_X}^{\bullet, \wedge}$ formé des éléments de F -torsion (i. e. réunion des noyaux des F^n). La flèche (4.6.2) induit, pour tout $n \geq 0$, un isomorphisme

$$(4.8.1) \quad \Omega_{W\mathcal{O}_X}^{\bullet, \wedge} / (N' + \text{Fil}^n(\Omega_{W\mathcal{O}_X}^{\bullet, \wedge})) \rightarrow W_n\Omega_X^\bullet.$$

Si l'on pose $\overline{N}' = \lim (N' + \text{Fil}^{n, \wedge}) / \text{Fil}^{n, \wedge}$, on a donc, avec les notations de 4.6 :

$$(4.8.2) \quad \overline{N}' = \overline{T}'.$$

Soit F l'endomorphisme de $W\Omega_X^\bullet$ défini par $p^i F$ en degré i . Comme $W\Omega_X^\bullet$ est sans p -torsion et que $FV = VF = p$, F est injectif. La flèche (4.6.2) s'annule donc sur N' et définit (4.8.1) par passage au quotient. Pour prouver que (4.8.1) est un isomorphisme, il suffit, par faisceautisation, de prouver que, pour S affine, $S = \text{Spec}(k)$, et X affine, $X = \text{Spec}(A)$, étale sur une algèbre de polynômes $k[t_1, \dots, t_r]$, la flèche analogue

$$(4.8.3) \quad \Omega_{WA}^{\bullet, \wedge} / (N' + \text{Fil}^n(\Omega_{WA}^{\bullet, \wedge})) \rightarrow W_n\Omega_A^\bullet$$

est un isomorphisme. Notons B la déformation étale de A sur

$$W\{t_1, \dots, t_r\} = \varprojlim W_n[t_1, \dots, t_r],$$

et F l'endomorphisme de B relevant le frobenius de A et compatible à l'endomorphisme de $W[t_1, \dots, t_r]$ donné par σ et $t_i \mapsto t_i^p$. Rappelons qu'on dispose alors de l'homomorphisme d'anneaux (01.3.20) :

$$t_F : B \rightarrow W(A),$$

compatible à F . Pour tout $n \geq 0$, t_F envoie $p^n B$ dans $V^n W(A)$, et l'homomorphisme de $p^n B / p^{n+1} B$ dans $V^n WA / V^{n+1} WA$ qui s'en déduit s'identifie à $F^n : A \rightarrow A$. Donc t_F est

injectif. Nous identifierons B à un sous-anneau de $W(A)$ au moyen de t_F . Pour $n \geq 0$:

$$(4.8.4) \quad R_n = \sum_{m \leq n} V^m B$$

est un sous-anneau de $W(A)$ (grâce à la formule $Vx \cdot y = V(x \cdot Fy)$), fini sur B (car $F^n(R_n) \subset B$); on a $R_0 = B$. Soit

$$(4.8.5) \quad R = \bigcup_n R_n = \sum_{n \geq 0} V^n B.$$

Notons $\Omega_{R_n}^\bullet$ le complexe de DR continu de R_n/W (séparé complété, pour la topologie p -adique, du complexe de DR algébrique). Rappelons que les composantes de $\Omega_B^\bullet$ sont projectives de type fini sur B , et que $\Omega_{R_n}^\bullet$ est engendré, comme W -adg, par R_n (EGA 0_{IV} 20.7.20). Posons

$$(4.8.6) \quad \Omega_R^\bullet = \varinjlim \Omega_{R_n}^\bullet.$$

L'endomorphisme de Frobenius de WA laisse stable chaque R_n , donc R , donc induit un endomorphisme F de $\Omega_{R_n}^\bullet$ (resp. $\Omega_R^\bullet$). Désignons par

$$(4.8.7) \quad N \subset \Omega_R^\bullet,$$

l'idéal différentiel gradué formé des éléments de F -torsion.

LEMME 4.8.8. — *La flèche canonique $\Omega_B^\bullet \rightarrow \Omega_R^\bullet/N$ est injective, et $\Omega_R^\bullet/N$ est sans p -torsion.*

Pour tout $n \geq 0$, on a $F^n(R_n) \subset B$, donc F^n induit une flèche $F^n : \Omega_{R_n}^\bullet \rightarrow \Omega_B^\bullet$, dont la composée avec la flèche canonique $\Omega_B^\bullet \rightarrow \Omega_{R_n}^\bullet$ est la flèche $F^n : \Omega_B^\bullet \rightarrow \Omega_{R_n}^\bullet$. Celle-ci est injective, comme on le vérifie aisément en se reportant à la définition de F . Les flèches canoniques $\Omega_B^\bullet \rightarrow \Omega_{R_n}^\bullet$, $\Omega_B^\bullet \rightarrow \Omega_R^\bullet$ sont donc injectives, et comme $\Omega_B^\bullet \cap N = 0$, il en est de même de $\Omega_B^\bullet \rightarrow \Omega_R^\bullet/N$. D'autre part, si $x \in \Omega_R^\bullet$ est tel que $px \in N$, pour n assez grand on a $pF^n x = 0$ et $F^n x \in \Omega_B^\bullet$, donc $F^n x = 0$ (car $\Omega_B^\bullet$ est sans p -torsion), i.e. $x \in N$. Donc la multiplication par p induit un endomorphisme injectif de $\Omega_R^\bullet/N$, ce qui prouve 4.8.8.

LEMME 4.8.9. — (a) *Il existe un unique endomorphisme d'algèbres graduées F de $\Omega_R^\bullet/N$ tel que $F = p^i F$ en degré i . On a $dF = pFd$.*

(b) *Il existe un unique homomorphisme $V : \Omega_R^\bullet/N \rightarrow \Omega_R^\bullet/N$ tel que $FV = VF = p$. On a $Vd = p dV$, et $V(xdy) = Vx \cdot dVy$, $xVy = V(Fx \cdot y)$ quels que soient $x, y \in \Omega_R^\bullet/N$.*

Soit $x \in R_n$. On peut écrire $x = y + Vz$, $y \in B$, $z \in R_{n-1}$. Donc $Fx = Fy + pz = y^p \bmod pR_n$, et comme $(Vz)^p = 0 \bmod pR_n$, on en déduit $Fx = x^p \bmod pR_n$. Il en résulte que $F(\Omega_{R_n}^i) \subset p^i \Omega_{R_n}^i$ pour tout $i \geq 0$, d'où (a). La première assertion de (b) se démontre comme 4.4(b), et le reste est évident.

Comme la topologie induite sur R_n par la filtration V -adique de WA est la topologie p -adique, les injections $R_n \rightarrow WA$ définissent des homomorphismes $\Omega_{R_n}^\bullet \rightarrow \Omega_{WA}^\bullet$, d'où un homomorphisme

$$(4.8.10) \quad \Omega_R^\bullet \rightarrow \Omega_{WA}^\bullet.$$

Comme $W\Omega_A^\bullet$ est sans F -torsion, le composé de (4.8.10) et de la flèche canonique $\Omega_{W_A}^\bullet \rightarrow W\Omega_A^\bullet$ (4.6.2) s'annule sur N , et fournit, pour tout $n \geq 0$, un homomorphisme d'algèbres différentielles graduées

$$(4.8.11) \quad \Omega_R^\bullet / (N + \text{Fil}^n \Omega_R^\bullet) \rightarrow W_n \Omega_A^\bullet,$$

où $\text{Fil}^n \Omega_R^\bullet$ est l'idéal différentiel gradué de $\Omega_R^\bullet$ engendré par $V^n R$.

LEMME 4.8.12. — Posons $\Omega_R^\bullet / N = L$, et, pour $n \geq 0$, $\text{Fil}^n L = \text{Fil}^n \Omega_R^\bullet / N \cap \text{Fil}^n \Omega_R^\bullet$, $L_n = L / \text{Fil}^n L = \Omega_R^\bullet / N + \text{Fil}^n \Omega_R^\bullet$, $\text{gr}^n L = \text{Fil}^n L / \text{Fil}^{n+1} L$.

$$(a) \text{ On a, pour tout } i, \text{Fil}^n L^i = V^n L^i + d V^n L^{i-1} = \sum_{m \geq n} V^m \Omega_B^i + d V^m \Omega_B^{i-1}.$$

$$(b) \Omega_B^\bullet \cap \text{Fil}^n L = p^n \Omega_B^\bullet.$$

(c) La flèche canonique $\Omega_B^\bullet \rightarrow L$ induit un isomorphisme $\Omega_A^\bullet \rightarrow \text{gr}^0 L$, et l'on a, pour tout i , une suite exacte

$$0 \rightarrow \Omega_A^i / B_n \Omega_A^i \rightarrow \text{gr}^n L^i \rightarrow \Omega_A^{i-1} / Z_n \Omega_A^{i-1} \rightarrow 0$$

[avec les notations de (0 2.2.2)], où la première flèche est induite par V^n et la seconde associée à la classe de $V^n x + d V^n y$ celle de y .

(d) La flèche (4.8.11) est un isomorphisme pour tout n .

Par définition, $\text{Fil}^n L$ est l'idéal différentiel gradué de L engendré par $V^n L^0 = V^n R$. Comme $\Omega_R^\bullet$ est engendré, comme W -adg, par R (4.8.6), il en est de même de L , et par suite (a) découle de 4.8.9(b). Soit $x \in \Omega_B^i \cap \text{Fil}^n L$. D'après (a), on peut écrire :

$$x = \sum_{0 \leq m \leq N} V^{n+m} y_m + d V^{n+m} z_m,$$

avec $y_m \in \Omega_B^i$, $z_m \in \Omega_B^{i-1}$. Grâce à 4.8.9(b) on en déduit

$$F^{n+N} x = p^n (F^N y_0 + p F^{N-1} y_1 + \dots + p^N y_N) + F^N dz_0 + F^{N-1} dz_1 + \dots + dz_N,$$

d'où

$$F^{n+N} x = p^n u + p^{-N} dv,$$

avec $u \in \Omega_B^i$, $v \in \Omega_B^{i-1}$. D'après (0 2.3.16), on a donc $F^{n+N} x \in p^n F^{n+N} \Omega_B^i$, donc $x \in p^n \Omega_B^i$, ce qui prouve (b). La première assertion de (c) résulte de (a) et (b), la seconde se démontre comme 3.8 et 3.9. Il résulte de (c) et 3.9 que la flèche $L \rightarrow W\Omega_A^\bullet$ déduite de (4.8.10) induit, pour tout n , un isomorphisme $\text{gr}^n L \xrightarrow{\sim} \text{gr}^n W\Omega_A^\bullet$, d'où (d).

Fin de la démonstration de 4.8. — La flèche (4.8.10) induit, pour tout $n \geq 0$, un homomorphisme d'algèbres différentielles graduées

$$(4.8.13) \quad \Omega_R^\bullet / (N + \text{Fil}^n \Omega_R^\bullet) \rightarrow \Omega_{W_A}^\bullet / (N' + \text{Fil}^n (\Omega_{W_A}^\bullet)^\wedge).$$

Si l'on identifie le premier membre à $W_n \Omega_A^\bullet$ par (4.8.11), (4.8.3) et (4.8.13) sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre, car $W_n \Omega_A^\bullet$ et $\Omega_{W_A}^\bullet / (N' + \text{Fil}^n (\Omega_{W_A}^\bullet)^\wedge)$ sont quotients

de $\Omega_{W_n, A}^\bullet$ et que les composés dans les deux sens induisent l'identité en degré 0. Cela achève la démonstration de 4.8.

4.9. On peut donner du complexe $L = \Omega_R^\bullet / N$ de (4.8.12) la description un peu plus concrète suivante. Posons, pour $n \geq 0$ et tout i :

$$(4.9.1) \quad J_n \Omega_B^i = p^{ni} \Omega_B^i \cap d^{-1}(p^{n(i+1)} \Omega_B^{i+1}).$$

Pour n fixé, les $J_n \Omega_B^i$ forment une sous-W-adg $J_n \Omega_B^\bullet$ de $\Omega_B^\bullet$ (dans la terminologie d'Ogus [11], 8.6, $J_n \Omega_B^\bullet$ est le sous-complexe de $\Omega_B^\bullet$ défini par la fonction « jauge généralisée » $x \mapsto nx$ sur $\mathbb{Z}$); on a $J_0 \Omega_B^\bullet = \Omega_B^\bullet$. On vérifie immédiatement que F envoie $J_n \Omega_B^\bullet$ dans $J_{n+1} \Omega_B^\bullet$, de sorte qu'on peut définir

$$(4.9.2) \quad J \Omega_B^\bullet = \varinjlim_F J_n \Omega_B^\bullet.$$

PROPOSITION 4.10. — Pour tout $n \geq 0$, $F^n : \Omega_{R_n}^\bullet \rightarrow \Omega_B^\bullet$ induit un isomorphisme

$$(4.10.1) \quad \Omega_{R_n}^\bullet / N_n \xrightarrow{\sim} J_n \Omega_B^\bullet.$$

où N_n est l'idéal différentiel gradué de $\Omega_{R_n}^\bullet$ formé des éléments de F -torsion.

Par passage à la limite, les isomorphismes (4.10.1) définissent donc un isomorphisme

$$(4.10.2) \quad \Omega_R^\bullet / N \xrightarrow{\sim} J \Omega_B^\bullet.$$

Démontrons 4.10. On voit aisément que F^n envoie $\Omega_{R_n}^\bullet$ dans $J_n \Omega_B^\bullet$. Comme la restriction de F à $\Omega_B^\bullet$ est injective, le noyau de $F^n : \Omega_{R_n}^\bullet \rightarrow \Omega_B^\bullet$ est N_n . Il reste à prouver que l'on a, pour tout i , $J_n \Omega_B^i \subset F^n(\Omega_{R_n}^i)$. Or $J_n \Omega_B^i = p^{ni} d^{-1}(p^{n(i+1)} \Omega_B^{i+1})$, donc, d'après (02.3.13), on a

$$J_n \Omega_B^i = F^n \Omega_B^i + p^{i+1} F^{n-1} \Omega_B^i + \dots + p^{n(i+1)} \Omega_B^i + p^{ni} d \Omega_B^{i-1} + \dots + p^i d F^{n-1} \Omega_B^{i-1}.$$

L'inclusion à démontrer en résulte, compte tenu de $FV = VF = p$.

Exemple 4.11. — Soit $A = k[T_1, \dots, T_p]$, prenons

$$B = W\{T_1, \dots, T_n\} = \varprojlim W_r\{T_1, \dots, T_n\},$$

et $F : B \rightarrow B$ donné par $F(T_i) = T_i^p$. Posons $C_r = W\{T_1^{p^{-r}}, \dots, T_n^{p^{-r}}\}$. Par analogie avec 2.1, appelons entières les formes $x \in \Omega_C^m$ qui s'écrivent

$$\sum a_{i_1 \dots i_m} d \log T_{i_1} \dots d \log T_{i_m} \text{ avec } a_{i_1 \dots i_m} \in C_r,$$

et notons K_r le sous-complexe de $\Omega_C^\bullet$ formé des formes entières dont la différentielle est entière. On voit facilement que F^r définit un isomorphisme $F^r : K_r \xrightarrow{\sim} J_r \Omega_B^\bullet$. Le complexe L de 4.8.12 apparaît ainsi comme une variante du complexe E introduit en 2.1.

5. Comparaison avec le complexe des courbes typiques de Bloch [12].

5.0. Dans ce numéro, sauf mention du contraire, on suppose $p > 2$, on désigne par X un schéma lisse sur un corps parfait k de car. p , et l'on suppose X de dimension $< p$. On écrira W (resp. W_n) pour $W(k)$ [resp. $W_n(k)$].

5.1. Rappel de la théorie de Bloch [12]. — Pour $i \geq 0$, soit C_X^i le module des courbes typiques sur le faisceau SK_{i+1} sur X , image de $K_1^{\otimes i+1} (= \mathcal{O}_X^{\otimes i+1})$ dans K_{i+1} par l'application produit (ou « symbole ») $(x_1, \dots, x_{i+1}) \mapsto \{x_1, \dots, x_{i+1}\}$; on a $C_X^0 = W(\mathcal{O}_X)$, et $C_X^i = 0$ pour $i > \dim(X)$. L'application $x \mapsto \{t, x\}$, où t est une indéterminée, définit un complexe (de W -modules) :

$$(5.1.1) \quad C_X^\bullet = (C_X^0 \xrightarrow{d} C_X^1 \xrightarrow{d} \dots \rightarrow C_X^i \xrightarrow{d} \dots)$$

(la différentielle $d : C_X^{i-1} \rightarrow C_X^i$ de (5.1.1) diffère de celle du complexe construit dans [12] par le signe $(-1)^i$: le complexe (5.1.1) est donc isomorphe à celui de (*loc. cit.*) par la multiplication par $(-1)^{i(i+1)/2}$ en degré i ; nous faisons ce choix pour simplifier certaines formules plus bas (5.1.12)). Les C_X^i sont munis d'une structure de $W(\mathcal{O}_X)$ -module et d'opérateurs injectifs F et V , coïncidant pour $i=0$ avec les opérateurs usuels. L'application $d : W\mathcal{O}_X \rightarrow C_X^1$ est une dérivation, et l'on a les relations

$$(5.1.2) \quad FV = VF = p, \quad dF = pFd, \quad Vd = pdV,$$

$$(5.1.3) \quad xVy = V(Fx, y),$$

quels que soient $x \in W\mathcal{O}_X$, $y \in C_X^i$. En outre, $C_X^\bullet$ est muni d'une filtration décroissante par des sous-complexes

$$(5.1.4) \quad \text{Fil}^0 C_X^\bullet = C_X^\bullet \supset \text{Fil}^1 C_X^\bullet \supset \dots \supset \text{Fil}^n C_X^\bullet \supset \dots,$$

telle que $\text{Fil}^n C_X^0 = V^n W(\mathcal{O}_X)$, et que, si l'on pose

$$(5.1.5) \quad C_{nX}^\bullet = C_X^\bullet / \text{Fil}^n C_X^\bullet,$$

on ait

$$(5.1.6) \quad C_X^\bullet = \varprojlim C_{nX}^\bullet.$$

De plus, on a, pour tout $n \geq 0$:

$$(5.1.7) \quad V(\text{Fil}^n C_X^\bullet) \subset \text{Fil}^{n+1} C_X^\bullet, \quad F(\text{Fil}^{n+1} C_X^\bullet) \subset \text{Fil}^n C_X^\bullet,$$

de sorte que V (resp. F) induit des applications $V : C_{nX}^\bullet \rightarrow C_{n+1X}^\bullet$ (resp. $F : C_{n+1X}^\bullet \rightarrow C_{nX}^\bullet$). Si l'on pose

$$(5.1.8) \quad \text{Fil}^n C_{rX}^\bullet = \begin{cases} \text{Ker}(C_{rX}^\bullet \rightarrow C_{nX}^\bullet) = \text{Fil}^n C_X^\bullet / \text{Fil}^r C_X^\bullet & \text{si } n \leq r, \\ 0 & \text{si } n \geq r, \end{cases}$$

on a, pour tout i :

$$(5.1.9) \quad \text{Fil}^n C_{rX}^i = V^n C_{r-n, X}^i + dV^n C_{r-n, X}^{i-1}$$

(en convenant que $C_{mX}^\bullet = 0$ pour $m \leq 0$). Il existe un unique homomorphisme de systèmes projectifs de complexes

$$(5.1.10) \quad \varphi_\bullet : \Omega_{W, \mathcal{O}_X}^\bullet \rightarrow C_X^\bullet,$$

qui soit $W_\bullet(\mathcal{O}_X)$ -linéaire en chaque degré et induise l'identité en degré 0; $\varphi_1 : \Omega_X^\bullet \rightarrow C_{1X}^\bullet$ est un isomorphisme (dans la suite, nous identifierons $C_{1X}^\bullet$ à $\Omega_X^\bullet$ au moyen de φ_1). Par passage à la limite, $\varphi_\bullet$ définit un morphisme de complexes, $W\mathcal{O}_X$ -linéaire en chaque degré

$$(5.1.11) \quad \varphi : \Omega_{W\mathcal{O}_X}^\bullet \rightarrow C_X^\bullet,$$

où $\Omega_{W\mathcal{O}_X}^\bullet = \varprojlim \Omega_{W_n, \mathcal{O}_X}^\bullet$ (4.6.1).

PROPOSITION 5.1.12. — *Quels que soient $x \in \mathcal{O}_X$, $y_1, \dots, y_i \in \mathcal{O}_X^*$, on a*

$$\varphi(\underline{x} d \log \underline{y}_1 \dots d \log \underline{y}_i) = \{E(xt), y_1, \dots, y_i\},$$

où t est une indéterminée, $E(\)$ désigne l'exponentielle d'Artin-Hasse, et, pour $z \in \mathcal{O}_X$, $\underline{z} = (z, 0, \dots, 0, \dots) = E(zt) \in W\mathcal{O}_X$ (0 1.2.5).

On procède par récurrence sur i . Le cas $i=0$ est trivial. Supposons $i \geq 1$. Posons $y = \prod_{1 \leq j \leq i} y_j$. On a :

$$\begin{aligned} \varphi(\underline{x} d \log \underline{y}_1 \dots d \log \underline{y}_i) &= \underline{x} \varphi(d \log \underline{y}_1 \dots d \log \underline{y}_i) = \underline{x} \varphi(\underline{y}^{-1} d \underline{y}_1 \dots d \underline{y}_i) \\ &= \underline{xy}^{-1} d \varphi(\underline{y}_1 d \underline{y}_2 \dots d \underline{y}_i) = \underline{xy}^{-1} d \varphi(\underline{y} d \log \underline{y}_2 \dots d \log \underline{y}_i) \\ &= \underline{xy}^{-1} \{t, E(yt), y_2, \dots, y_i\} \quad (\text{hypothèse de récurrence}). \end{aligned}$$

Comme $d : C_X^0 \rightarrow C_X^1$ est une dérivation, on a

$$\{t, E(yt)\} = \sum_{1 \leq j \leq i} \underline{y}_1 \dots \underline{\hat{y}}_j \dots \underline{y}_i \{t, E(y_j t)\}$$

(où $\hat{}$ au-dessus d'un symbole indique qu'on l'omet). Mais, d'après [12], II, § 7, 1.6 (ii), on a

$$\{t, E(y_j t)\} = -\{E(y_j t), t\} = \{E(y_j t), y_j\},$$

donc

$$\{t, E(yt)\} = \sum_{1 \leq j \leq i} \{E(yt), y_j\}.$$

Comme les C_X^i sont des W -modules, l'antisymétrie des symboles entraîne que $\{E(yt), y_j, y_2, \dots, y_i\} = 0$ pour $j \geq 2$, donc finalement

$$\varphi(\underline{x} \log \underline{y}_1 \dots d \log \underline{y}_i) = \underline{xy}^{-1} \{E(yt), y_1, \dots, y_i\} = \{E(xt), y_1, \dots, y_i\},$$

ce qui achève la démonstration.

Rappelons enfin que le gradué associé à $C_X^\bullet$ pour la filtration (5.1.4) :

$$(5.1.13) \quad \mathrm{gr}^n C_X^\bullet = \mathrm{Fil}^n C_X^\bullet / \mathrm{Fil}^{n+1} C_X^\bullet = \mathrm{Fil}^n C_{n+1, X}^\bullet,$$

possède une structure analogue à celle du gradué associé au complexe de DR-Witt pour la filtration canonique (3.9) : on a, pour tout i , une suite exacte de $\mathcal{O}_X$ -modules :

$$(5.1.14) \quad 0 \rightarrow F_*^{n+1} \Omega_X^i / B_n \Omega_X^i \xrightarrow{a} \mathrm{gr}^n C_X^i \xrightarrow{b} F_*^{n+1} \Omega_X^{i-1} / Z_n \Omega_X^i \rightarrow 0,$$

où $\mathrm{gr}^n C_X^i$ est considéré comme $\mathcal{O}_X$ -module grâce à $F : \mathcal{O}_X \hookrightarrow W_{n+1} \mathcal{O}_X / p W_{n+1} \mathcal{O}_X$ (et au fait que $p \mathrm{gr}^n C_X^i = 0$), a est induit par V^n et b associe à la classe de $V^n x + d V^n y$ celle de y .

THÉOREME 5.2. — *L'homomorphisme $\varphi_\bullet$ (5.1.10) se factorise en*

$$(5.2.1) \quad \Omega_{W_\bullet, \mathcal{O}_X}^\bullet \xrightarrow{\pi_\bullet} W_\bullet \Omega_X^\bullet \xrightarrow{u_\bullet} C_{X^\bullet}^\bullet,$$

où $\pi_\bullet$ est la projection canonique 1.3 et $u_\bullet$ est un isomorphisme, $W_\bullet(\mathcal{O}_X)$ -linéaire en chaque degré, compatible à F et V .

Si l'on savait *a priori* prolonger la structure de $C_{nX}^\bullet$ en une structure de $\mathbb{Z}$ -adg de manière que $(C_{X^\bullet}^\bullet, V)$ soit un V -pro-complexe de DR (1.1), l'existence de la factorisation (5.2.1) découlerait de la propriété universelle du pro-complexe de DR-Witt (1.4), et le fait que $u_\bullet$ soit un isomorphisme résulterait de 3.9 et (5.1.14). Faute de pouvoir définir directement sur $(C_{X^\bullet}^\bullet, V)$ cette structure de V -pro-complexe de DR (que l'on récupérera *a posteriori* comme corollaire de 5.2), nous construirons $u_\bullet$ « à la main » en utilisant la structure fine du complexe des formes entières (2.20).

Pour tout r et tout i , $\Omega_{W_r, \mathcal{O}_X}^i$ (resp. $W_r \Omega_X^i$) est un faisceau quasi-cohérent sur $W_r(X)$, de formation compatible à la localisation étale (1.13.1, 1.14). Il résulte de (5.1.14) qu'il en est de même de C_{rX}^i . De plus, $\varphi_\bullet$, $\pi_\bullet$ commutent à la localisation étale. L'existence de la factorisation (5.2.1) est donc locale pour la topologie étale. Par ailleurs, les relations (5.1.2) entraînent que si $u_\bullet$ est compatible à V , $u_\bullet$ est automatiquement compatible à F . Enfin, d'après (0 1.5.8), (1.5.1) et (5.1.3), la question de la compatibilité de $u_\bullet$ à V est également locale pour la topologie étale. Pour démontrer 5.2, il suffit donc de prouver le lemme suivant :

LEMME 5.3. — Soit $A = k[T_1, \dots, T_n, T_1^{-1}, \dots, T_n^{-1}]$. L'homomorphisme $\varphi_\bullet : \Omega_{W_\bullet, A}^\bullet \rightarrow C_A^\bullet$ se factorise en

$$(5.3.1) \quad \Omega_{W_\bullet, A}^\bullet \xrightarrow{\pi_\bullet} W_\bullet \Omega_A^\bullet \xrightarrow{u_\bullet} C_A^\bullet,$$

où $u_\bullet$ est un isomorphisme $W_\bullet(A)$ -linéaire en chaque degré, et compatible à V .

Soit E le complexe de formes entières associé à A (2.20). Identifions $W_\bullet \Omega_A^\bullet$ à E , par (2.20.4). On va construire un homomorphisme de complexes $u : E \rightarrow C_A^\bullet$, compatible aux filtrations $\text{Fil}^\bullet$ des deux membres, qui, par réduction mod $\text{Fil}^\bullet$, donnera l'homomorphisme u_* annoncé. On définira u en envoyant les éléments de base de E sur certains symboles. Nous aurons besoin pour cela de réécrire ces éléments de base sous une forme spécialement adaptée au calcul dans $C_A^\bullet$.

LEMME 5.4. — Soient m un entier ≥ 1 , $k = (k_1, \dots, k_n) \in G = \mathbb{Z}[p^{-1}]^n$ tel que $a_1 \leq \dots \leq a_n$, où $a_i = v_p(k_i)$. Posons $p^{-a_i} = q_i$ ($1 \leq i \leq n$). Soit $\underline{i} = (i_1, \dots, i_m)$ une suite d'entiers tels que $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$. Notons $(x_1, \dots, x_m)$ la suite de monômes (de degrés $\in \mathbb{Z}^n$) définie par

$$x_r = \begin{cases} 1^{a_{i_r}} & \text{si } k_{i_r} \neq 0, \\ T_{i_r} & \text{si } k_{i_r} = 0 \end{cases}$$

(avec la notation $T_S^k = \prod_{i \in S} T_i^{k_i}$ pour $S \subset [1, n]$, et la convention $i_{m+1} = n+1$). Alors, en fonction des hypothèses $i_1 = 1$ ou $i_1 < 1$, $k_1 \in \mathbb{Z}$ ou $k_1 \notin \mathbb{Z}$, l'élément de base $e_{\underline{i}}(k) \in {}_k E^m$ (2.7.1) est donné par le tableau suivant :

	$1 < i_1$	$1 = i_1$
$k_1 \in \mathbb{Z} \dots \dots \dots$	$T^k \prod_{1 \leq r \leq m} d \log x_r$	$F^{a_1} dT^{q_1 k} \prod_{2 \leq r \leq m} d \log x_r$
$k_1 \notin \mathbb{Z} \dots \dots \dots$	$(V^{-a_1} T^{q_1 k}) \prod_{1 \leq r \leq m} d \log x_r$	$(dV^{-a_1} T^{q_1 k}) \prod_{2 \leq r \leq m} d \log x_r$

(où $d \log u = du/u$ pour u inversible).

On va faire la vérification dans chacun des cas du tableau.

(1) $k_1 \in \mathbb{Z}$ et $1 < i_1$. Posons $x_0 = T_{[1, i_1]}^{q_1 k}$, et soit t le plus grand indice tel que $k_{i_t} \notin \mathbb{Z}$. Compte tenu du formulaire 2.2, qui entraîne notamment $F(du) = (Fu) d \log u$ si u est un monôme, $e_{\underline{i}} = e_{\underline{i}}(k)$ s'écrit :

$$\begin{aligned} e_{\underline{i}} &= V^{-a_1} x_0 \prod_{1 \leq r \leq t} dV^{-a_{i_r}} x_r \prod_{\substack{r \geq t+1 \\ k_{i_r} \neq 0}} F^{a_{i_r}} dx_r \prod_{\substack{r \geq t+1 \\ k_{i_r} = 0}} d \log x_r \\ &= V^{-a_1} (x_0 \prod_{1 \leq r \leq t} F^{-a_{i_r}} dV^{-a_{i_r}} x_r \prod_{\substack{r \geq t+1 \\ k_{i_r} \neq 0}} F^{-a_1 + a_{i_r}} dx_r \prod_{\substack{r \geq t+1 \\ k_{i_r} = 0}} d \log x_r) \\ &= V^{-a_1} (x_0 \prod_{\substack{r \geq 1 \\ k_{i_r} \neq 0}} F^{-a_1 + a_{i_r}} dx_r \prod_{\substack{r \geq 1 \\ k_{i_r} = 0}} d \log x_r) = V^{-a_1} y \prod_{1 \leq r \leq m} d \log x_r, \end{aligned}$$

où

$$y = x_0 \prod_{\substack{r \geq 1 \\ k_{i_r} \neq 0}} F^{-a_1 + a_{i_r}} x_r = T^{q_1 k},$$

d'où la formule du tableau.

(2) $k_1 \notin \mathbb{Z}$ et $i_1 = 1$. Soit t comme en (1). Un calcul analogue donne :

$$e_{\underline{i}} = \prod_{1 \leq r \leq t} dV^{-a_r} x_r \prod_{\substack{r \geq t+1 \\ k_r \neq 0}} F^{a_r} dx_r \prod_{\substack{r \geq t+1 \\ k_r = 0}} d \log x_r = dV^{-a_1} y \prod_{2 \leq r \leq m} d \log x_r,$$

avec

$$y = x_1 \prod_{\substack{r \geq 2 \\ k_r \neq 0}} F^{-a_1 + a_r} x_r = T^{q_1 k},$$

d'où la conclusion.

(3) $k_1 \in \mathbb{Z}$ et $1 < i_1$. Si $k_1 = 0$, $k = 0$ et l'assertion est triviale. Supposons donc $k_1 \neq 0$, et posons $x_0 = T_{[1, i_1]}^{q_1 k}$. On a :

$$e_{\underline{i}} = F^{a_1} x_0 \prod_{\substack{r \geq 1 \\ k_r \neq 0}} F^{a_r} dx_r \prod_{\substack{r \geq 1 \\ k_r = 0}} d \log x_r = F^{a_1} y \prod_{r \geq 1} d \log x_r,$$

avec

$$y = x_0 \prod_{\substack{r \geq 1 \\ k_r \neq 0}} F^{-a_1 + a_r} x_r = T^{q_1 k},$$

donc $F^{a_1} y = T^k$, d'où la formule voulue.

(4) $k_1 \in \mathbb{Z}$ et $i_1 = 1$. On a

$$\begin{aligned} e_{\underline{i}} &= \prod_{\substack{r \geq 1 \\ k_r \neq 0}} F^{a_r} dx_r \prod_{\substack{r \geq 1 \\ k_r = 0}} d \log x_r = F^{a_1} (dx_1 \prod_{\substack{r \geq 2 \\ k_r \neq 0}} F^{-a_1 + a_r} dx_r \prod_{\substack{r \geq 2 \\ k_r = 0}} d \log x_r) \\ &= F^{a_1} d(y \prod_{r \geq 2} d \log x_r) = (F^{a_1} dy) \prod_{r \geq 2} d \log x_r, \end{aligned}$$

où

$$y = x_1 \prod_{\substack{r \geq 2 \\ k_r \neq 0}} F^{-a_1 + a_r} x_r = T^{q_1 k},$$

ce qui achève la démonstration de 5.4.

5.5. Prouvons 5.3. Soient m un entier ≥ 0 , $\underline{i} \in I_m$ (2.7, 2.11), $k \in \mathbb{Z}[p^{-1}]^n$, $a_i = v_p(k_i)$. Si $a_1 \leq \dots \leq a_n$, notons

$$f_{\underline{i}}(k) \in C_A^m$$

l'élément défini comme suit : (a) si $m = 0$:

$$(5.5.1) \quad f_0(k) = f_{\emptyset}(k) = \begin{cases} \underline{T}^k & \text{si } k_1 \in \mathbb{Z}, \\ V^{-a_1} (F^{-a_1} \underline{T}^k) & \text{si } k_1 \notin \mathbb{Z}, \end{cases}$$

avec la notation habituelle $\underline{y} = (y, 0, \dots) \in \text{WA}$ pour $y \in A$; si $m \geq 1$, $f_i(k)$ est donné par le tableau suivant :

(5.5.2)

	$1 < i_1$	$i_1 = 1$
$k_1 \in \mathbb{Z} \dots \dots \dots$	$\{E(T^{k_1} t), x_1, \dots, x_m\}$	$F^{a_1} \{t, E(F^{-a_1} T^{k_1} t), x_2, \dots, x_m\}$
$k_1 \notin \mathbb{Z} \dots \dots \dots$	$V^{-a_1} \{E(F^{-a_1} T^{k_1} t), x_1, \dots, x_m\}$	$\{t, E(F^{-a_1} T^{k_1} t^{p^{-a_1}}), x_2, \dots, x_m\}$

où $E(\quad)$ désigne l'exponentielle d'Artin-Hasse et $x_1, \dots, x_m$ sont les monômes définis en 5.4 [ce tableau redonne d'ailleurs (5.5.1) par omission des x_i , vu que $\underline{y} = E(yt)$]. Sans hypothèse de croissance sur la suite $(a_1, \dots, a_n)$, on notera encore $f_i(k) \in C_A^m$ l'élément défini par

$$(5.5.3) \quad \begin{cases} f_0(k) = f_0(k')(T'), \\ f_i(k) = f_i(k')(T'), \end{cases}$$

le second membre étant défini par (5.5.1), (5.5.2), avec k' , T' comme en 2.9. Soit

$$(5.5.4) \quad u : E \rightarrow C_A^*$$

l'application, W-linéaire en chaque degré, définie par $u(e_i(k)) = f_i(k)$ (avec les notations de 2.9). On vérifie tout de suite que $df_i(k)$, $V f_i(k)$ sont donnés par les formules 2.11 (a), (b) où e est remplacé par f . Donc u est un homomorphisme de complexes, compatible à V , donc à F . Rappelons (2.20) que E contient comme sous-W-adg $\Omega_B^* = \Omega_{B/W}^*$, où $B = W[T_1, \dots, T_n, T_1^{-1}, \dots, T_n^{-1}]$.

LEMME 5.5.5. — La restriction de u à Ω_B^* coïncide avec l'application composée

$$\psi : \Omega_B^* \xrightarrow{(1)} \Omega_{WA}^* \xrightarrow{(2)} \Omega_{WA}^* \xrightarrow{\varphi} C_A^*,$$

où (1) est défini par l'inclusion $B \hookrightarrow E^0 \hookrightarrow \text{WA}$ (2.3, 2.20), (2) est l'application canonique (4.6.1), et φ l'application (5.1.11).

Les éléments $e_i(k)$, pour $k \in \mathbb{Z}^n$, $m \in \mathbb{N}$, $i \in I_m$, forment une base de Ω_B^* sur W . Comme u est compatible à F , il suffit donc, compte tenu de 5.4 (ligne $k_1 \in \mathbb{Z}$), de prouver que, si $b, y_1, \dots, y_m$ sont des monômes (de degré $\in \mathbb{Z}^n$), on a

$$(\star) \quad \psi(b d \log y_1 \dots d \log y_m) = \{E(bt), y_1, \dots, y_m\}$$

[avec la convention que $(\star)$ se réduit à $\psi(b) = E(bt)$ si $m=0$]. Mais

$$\psi(b d \log y_1 \dots d \log y_m) = \varphi(\underline{b} d \log y_1 \dots d \log y_i),$$

donc $(\star)$ est cas particulier de 5.1.12.

LEMME 5.5.6. — u est E^0 -linéaire en chaque degré.

Compte tenu de 5.4 et de la compatibilité de u à d, V, F , il suffit de vérifier que, si $a, b, y_1, \dots, y_m$ sont des monômes (de degré $\in \mathbb{Z}^n$), et $r, s \in \mathbb{N}$, on a :

- (i) $u(V^r a \cdot V^s b \cdot d \log y_1 \dots d \log y_m) = u(V^r a) u(V^s b \cdot d \log y_1 \dots d \log y_m),$
- (ii) $u(V^r a \cdot dV^s b \cdot d \log y_1 \dots d \log y_m) = u(V^r a) u(dV^s b \cdot d \log y_1 \dots d \log y_m).$

Utilisant la compatibilité de u à F et l'injectivité de F sur $C_A^\bullet$, on se ramène, par application d'une puissance convenable de F , à vérifier (i) pour $r=s=0$, et

- (iii) $u(a F^r db \cdot d \log y_1 \dots d \log y_m) = u(a) u(F^r db \cdot d \log y_1 \dots d \log y_m),$

ce qui résulte de la B -linéarité de u (5.5.5).

Terminons la démonstration de 5.3. L'application u , étant compatible à d et V , envoie $\text{Fil}^n E^i = V^n E^i + dV^n E^{i-1}$ (2.20) dans $V^n C_A^i + dV^n C_A^{i-1} \subset \text{Fil}^n C_A^i$, donc induit un homomorphisme de systèmes projectifs de complexes, compatible à V :

$$u_\bullet : W_\bullet \Omega_A^\bullet \rightarrow C_A^\bullet.$$

$E_\bullet$ étant identifié à $W_\bullet \Omega_A^\bullet$ par (2.20.4). Par construction, $u_\bullet^0 : W_\bullet A \rightarrow W_\bullet A$ est l'identité; d'autre part, d'après 5.5.7, $u_\bullet$ est $W_\bullet A$ linéaire en chaque degré. Le composé $u_\bullet \pi_\bullet : \Omega_{W,A}^\bullet \rightarrow C_A^\bullet$ jouit des mêmes propriétés, donc coïncide avec $\varphi_\bullet$ (5.1.10). Il découle de 3.9 et (5.1.14) que $u_\bullet$ induit un isomorphisme $\text{gr } W \Omega_A^\bullet \xrightarrow{\sim} \text{gr } C_A^\bullet$, donc est un isomorphisme. Cela termine la démonstration de 5.3, donc de 5.2.

5.6. Par passage à la limite, l'isomorphisme $u_\bullet$ (5.2.1) définit un isomorphisme de complexes

$$(5.6.1) \quad u : W \Omega_X^\bullet \xrightarrow{\sim} C_X^\bullet,$$

$W(\mathcal{O}_X)$ -linéaire en chaque degré, et compatible à F et V . Il résulte de 5.1.12 que l'on a

$$(5.6.2) \quad \begin{cases} u(V^n \underline{x} d \log y_1 \dots d \log y_i) = \{ E(xt^{p^n}), y_1, \dots, y_i \}, \\ u(dV^n \underline{x} d \log y_1 \dots d \log y_i) = \{ t, E(xt^{p^n}), y_1, \dots, y_i \} \end{cases}$$

quels que soient $x \in \mathcal{O}_X, y_1, \dots, y_i \in \mathcal{O}_X^*, n \in \mathbb{N}$.

L'isomorphisme $u_\bullet$ fait de $C_X^\bullet$ un système projectif d'adg, tel que $\varphi_\bullet$ soit un homomorphisme de systèmes projectifs d'adg. Le formulaire (5.1.2), (5.1.3) se complète en le formulaire 2.18. Cela résout affirmativement la question de Bloch [12], IV, Problem 1.

5.7. Généralisation de 3.27. — A partir de maintenant, on ne suppose plus $p > 2$, et l'on désigne par S un schéma parfait de car. p , et par X un schéma lisse sur S (de dimension relative quelconque).

Pour $i \geq 1$ et tout n , nous noterons

$$(5.7.1) \quad W_n \Omega_{X, \log}^i,$$

le sous-faisceau abélien de $W_n \Omega_X^i$ engendré localement, pour la topologie étale sur X , par les sections de la forme $d \log \underline{x}_1 \dots d \log \underline{x}_i$, pour $x_1, \dots, x_i \in \mathcal{O}_X^*$, si $n \geq 1$, et $W_n \Omega_{X, \log}^i = 0$ si $n \leq 0$. Pour i fixé, les $W_n \Omega_{X, \log}^i$ forment un sous-pro-faisceau abélien $W \cdot \Omega_{X, \log}^i$ de $W \cdot \Omega_X^i$. Le résultat suivant généralise 3.27 :

THÉOREME 5.7.2. — *Pour la topologie étale sur X , on a une suite exacte de pro-faisceaux*

$$(5.7.2.1) \quad 0 \rightarrow W \cdot \Omega_{X, \log}^i \rightarrow W \cdot \Omega_X^i \xrightarrow{1-F} W \cdot \Omega_X^i \rightarrow 0.$$

Pour $x \in \mathcal{O}_X^*$, on a $F d \log \underline{x} = d \log x$ (2.17), donc $W \cdot \Omega_{X, \log}^i$ est contenu dans le noyau de $1-F$. L'exactitude de (5.7.2.1) à droite ayant déjà été vue (3.26), il reste donc à prouver $\text{Ker}(1-F) \subset W \cdot \Omega_{X, \log}^i$. Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 5.7.3. — *Pour tout $n \geq 0$, on a une suite exacte pour la topologie étale sur X :*

$$(5.7.3.1) \quad 0 \rightarrow \Omega_{X, \log}^i \rightarrow \Omega_X^i / B_n \Omega_X^i \xrightarrow{1-C^{-1}} \Omega_X^i / B_{n+1} \Omega_X^i \rightarrow 0,$$

où $\Omega_{X, \log}^i = W_1 \Omega_{X, \log}^i$ et B_n est le faisceau défini en (02.2.2).

Pour $n=0$, l'assertion découle immédiatement de (02.4.2). Le cas général s'en déduit par le même argument qu'en (02.2.9).

L'exactitude de (5.7.2.1) au centre va résulter de la formule plus précise suivante [qui généralise (3.24.1)] : pour $n \geq 1$ et $0 \leq m \leq n$:

$$(5.7.4) \quad \text{Ker}(1-F : \text{Fil}^m W_{n+1} \Omega_X^i \rightarrow W_n \Omega_X^i) \subset p^m W_{n+1} \Omega_{X, \log}^i + \text{Fil}^n W_{n+1} \Omega_X^i.$$

Comme $(1-F)(W_{n+1} \Omega_{X, \log}^i) = 0$, il suffit de prouver que, pour $m < n$, on a

$$(1) \quad \text{Ker}(1-F : \text{Fil}^m W_{n+1} \Omega_X^i \rightarrow W_n \Omega_X^i) \subset p^m W_{n+1} \Omega_{X, \log}^i + \text{Fil}^{m+1} W_{n+1} \Omega_X^i.$$

La démonstration est analogue à celle de (3.24.2). Tout d'abord, (5.7.3.1) pour $n=0$ entraîne que (1) est vrai pour $m=0$. Supposons $m \geq 1$ et soit $x = V^m y + dV^m z$ tel que $Fx = x$ dans $W_n \Omega_X^i$. Alors $dV^{m-1} z = 0$ dans $\text{gr}^{m-1} W \Omega_X^i$, donc (3.8.2) $z \in Z_m \Omega_X^{i-1} \text{ mod Fil}^1$, et par suite il existe (localement) u tel que $z = F^m u \text{ mod Fil}^1$, donc $V^m z = p^m u \text{ mod Fil}^{m+1}$. Changeant les notations, on peut donc récrire $x = V^m y + dV^{m+1} z$. Écrivant $Fx - x = 0$ dans $\text{gr}^m W \Omega_X^i$, on voit, par 3.8, qu'il existe (localement) $b \in W \Omega_X^{i-1}$ tel que $z = F^m b \text{ mod Fil}^1$, donc $V^m z = p^m b \text{ mod Fil}^{m+1}$, et que l'image de $Fy - y$ dans Ω_X^i appartient à $B_{m+1} \Omega_X^i$. Par (5.7.3.1), on en conclut que

$$y \in W \cdot \Omega_{X, \log}^i \text{ mod Fil}^1 W \cdot \Omega_X^i + B_m \Omega_X^i,$$

donc (3.8.1) $V^m y \in p^m W_{n+1} \Omega_{X, \log}^i \text{ mod Fil}^{m+1} W_{n+1} \Omega_X^i$, d'où (1), ce qui achève la preuve de (5.7.4), donc de 5.7.2.

COROLLAIRE 5.7.5. — Pour tout $n \geq 1$, la flèche naturelle

$$(5.7.5.1) \quad W_* \Omega_{X, \log}^i / p^n W_* \Omega_{X, \log}^i \rightarrow W_n \Omega_{X, \log}^i$$

est un isomorphisme de pro-objets (i.e. le membre de gauche est essentiellement constant, de valeur $W_n \Omega_{X, \log}^i$).

Cela résulte immédiatement de (5.7.4).

Sous les hypothèses de 5.0, notons

$$(5.7.6) \quad d \log : SK_{iX} \rightarrow W \Omega_X^i,$$

l'homomorphisme défini par $d \log(x) = \{E(t), x\}$. D'après 5.1.12, (5.7.6) induit un épimorphisme de systèmes projectifs

$$(5.7.7) \quad d \log : SK_{iX} / p^* SK_{iX} \rightarrow W_* \Omega_{X, \log}^i,$$

et, en particulier, un épimorphisme

$$(5.7.8) \quad d \log : SK_{iX} / p SK_{iX} \rightarrow \Omega_{X, \log}^i [=v(i) \quad (02.4.1)].$$

PROPOSITION 5.7.9. — L'homomorphisme (5.7.7) est un isomorphisme si et seulement si (5.7.8) est un isomorphisme.

Si (5.7.7) est un isomorphisme, (5.7.8) aussi d'après 5.7.5. Inversement, supposons que (5.7.8) soit un isomorphisme, et prouvons que, pour $n \geq 1$, la suite

$$0 \rightarrow p^n SK_{iX} \rightarrow SK_{iX} \xrightarrow{d \log} W_n \Omega_X^i$$

est exacte. Soit $x \in SK_{iX}$ tel que $d \log x = 0$. Si $x = p^m y$, avec $0 \leq m < n$, on a $p^m d \log y = 0$, donc (3.4.1) $d \log y \in \text{Fil}^{n-m} \subset \text{Fil}^1$, donc, (5.7.8) étant injectif, $y \in p SK_{iX}$, donc $x \in p^{m+1} SK_{iX}$, d'où la proposition.

Comme il a déjà été dit, on ignore si (5.7.8) est un isomorphisme pour $i \geq 2$.

II. — Suite spectrale des pentes et applications

Soient S un schéma parfait de car. p et $f : X \rightarrow S$ un morphisme de type fini. On construit, au n° 1, pour tout $n \geq 1$, une flèche canonique de $D(W_n(S))$:

$$(1) \quad R f_{\text{cris}*} (\mathcal{O}_{X/W_n(S)}) \rightarrow R f_* (W_n \Omega_X^*),$$

compatible aux structures multiplicatives des deux membres et fonctorielle en X (donc en particulier compatible aux endomorphismes de Frobenius), et l'on prouve que (1) est un isomorphisme quand f est lisse. En fait, la flèche (1) s'obtient par application de $R f_*$ à une flèche de $D(f^{-1} W_n(\mathcal{O}_S))$:

$$(2) \quad R u_{X/W_n(S)*} (\mathcal{O}_{X/W_n(S)}) \rightarrow W_n \Omega_X^*,$$

où, avec les notations de Berthelot [4], $u_{X/W_n(S)}$ désigne la projection sur le topos zariskien du topos cristallin de $X/W_n(S)$, et l'on montre que (2) est un isomorphisme pour f lisse. La définition de (2) se fait par descente cohomologique et nécessite certains choix, inhérents au calcul du premier membre de (2) comme complexe de De Rham (0.3.2) : choix d'ouverts affines U_i recouvrant X , de plongements des U_i dans des Y_i formels lisses sur $W(S)$, de prolongements des immersions $U_i \rightarrow Y_i$ en des flèches $W_n(U_i) \rightarrow Y_i$ [il est même commode de choisir les Y_i avec des relèvements du frobenius de leur réduction mod p et d'utiliser les flèches de Cartier t_F de (0.1.3)]. Cependant la flèche (2) ne dépend pas de ces choix. Pour prouver qu'elle est un isomorphisme quand f est lisse, on peut supposer, la question étant locale sur X , que X se relève en Y formel lisse sur $W(S)$ (et même que le frobenius se relève) et la conclusion découle du fait que la flèche obtenue, de $\Omega_Y^\bullet$ dans $W\Omega_X^\bullet$, induit, d'après (I.3.14), des quasi-isomorphismes sur les gradués associés (pour la filtration p -adique et la filtration canonique). Une autre explication de ce fait est fournie par le résultat de Deligne (I.2.21.4).

La suite de cette partie est consacrée à l'extension des résultats globaux de [12] aux schémas X propres et lisses sur un corps parfait k de car. p . Le théorème de comparaison du n° 1 entraîne que la cohomologie cristalline de X par rapport à W , $H^*(X/W)$, est l'hypercohomologie de X à valeurs dans le complexe de De Rham-Witt. Elle est donc l'aboutissement d'une suite spectrale, dite suite spectrale des pentes, de terme $E_1^{ij} = H^j(W\Omega_X^i)$. L'étude de cette suite spectrale fait l'objet des n°s 2 et 3. On prouve d'abord, au n° 2, diverses propriétés de finitude du terme initial, la plus importante étant 2.13, qui généralise [12], III 2.2, et dont on déduit, au début du n° 3, la dégénérescence en E_1 de la suite spectrale des pentes modulo torsion, extension du résultat principal de Bloch [12], III 3.2. La plupart du temps, nos arguments ne sont en fait qu'une simple paraphrase de ceux de [12]. Dans la suite du n° 3, nous indiquons divers raffinements de ce théorème de dégénérescence, dus pour l'essentiel à Nygaard ([54], [55]), notamment un critère de dégénérescence en E_1 , et le fait que la suite spectrale des pentes d'une surface dégénère en E_2 . D'autres compléments, concernant la structure du terme E_1 de la suite spectrale des pentes et la dégénérescence en E_2 modulo torsion de la suite spectrale « conjuguée », seront donnés dans [37].

Au n° 4, on examine quelques conséquences remarquables de l'absence de torsion dans le terme initial de la suite spectrale des pentes. Les $H^j(W\Omega_X^i)$ sont alors les modules de Dieudonné covariants de groupes formels p -divisibles, dont on peut relier les dimensions aux nombres de Hodge de X (4.5). De plus, la suite spectrale de Hodge $E_1^{ij} = H^j(\Omega_X^i) \Rightarrow H_{DR}^*(X/k)$ dégénère en E_1 , $H^*(X/W)$ est sans torsion, et l'on retrouve l'inégalité de Katz-Mazur-Ogus ([49], [11]) entre polygones de Newton et de Hodge, avec un complément étonnant, observé par Bloch : pour chaque n , le polygone de Newton de $H^n(X/W)$ rencontre le polygone de Hodge correspondant sur chaque intervalle où ce dernier est de pente constante. Le n° 4 se termine par une autre application du théorème de dégénérescence 3.2, indépendante des précédentes, concernant les schémas projectifs lisses sur W admettant un endomorphisme relevant le frobenius (4.11).

A l'aide des suites exactes de (I.3.F), on met en relation, au n° 5, les parties de pentes 0 et 1 de $H^*(X/W)$ avec la cohomologie étale $H^*(X, \mathbb{Z}_p) = \varprojlim H^*(X, \mathbb{Z}/p^n)$ et la cohomologie plate $H^*(X, \mathbb{Z}_p(1)) = \varprojlim H^*(X, \mu_{p^n})$. On obtient notamment une généralisation de l'inégalité

d'Igusa-Artin-Mazur [2] $\rho \leq b_2 - 2h$ à tous les schémas projectifs lisses sur un corps algébriquement clos de car. p (5.12). Nous nous sommes efforcés aussi de dégager, pour le H^2 , des énoncés ne négligeant pas la torsion : (5.10.1), 5.14.

Le n° 6 contient une ébauche d'étude de la torsion de la cohomologie cristalline, principalement du H^2 . Soit X un schéma propre et lisse sur un corps algébriquement clos k de car. p . Si l est un nombre premier distinct de p , la théorie de Kummer montre que la torsion de la cohomologie étale $H^2(X, \mathbb{Z}_l)$ est toute entière algébrique, plus précisément, si $\text{NS}(X)$ est le groupe de Néron-Severi de X , l'homomorphisme « première classe de Chern » envoie isomorphiquement la l -torsion de $\text{NS}(X)$ sur la torsion de $H^2(X, \mathbb{Z}_l)$. En cohomologie cristalline, on dispose de manière analogue d'un homomorphisme première classe de Chern $\text{NS}(X) \otimes W \rightarrow H^2(X/W)$. Celui-ci est injectif, mais n'induit pas en général un isomorphisme sur les parties de torsion [par exemple dans le cas d'une surface d'Enriques de type α_2 (cf. 7.3)]. On peut se demander si ce défaut ne vient pas simplement du fait qu'on a négligé la « torsion radicielle » du schéma de Picard, i.e. $\text{Pic}_{X/k}^0 / \text{Pic}_{X/k, \text{red}}^0 = T$. En effet, le module de Dieudonné covariant de T n'est autre que la V -torsion de $H^2(W \mathcal{O}_X)$, et il n'est pas difficile de voir que ce module se relève canoniquement dans la torsion de $H^2(X/W)$ (6.6) et est « disjoint » de la torsion de $\text{NS}(X) \otimes W$ (6.8). Il est donc naturel de poser la question : la torsion de $H^2(X/W)$ est-elle somme de la V -torsion de $H^2(W \mathcal{O}_X)$ et de la torsion de $\text{NS}(X) \otimes W$? La réponse est non. Si l'on désigne la somme précédente par $H^2(X/W)_d$ (partie « divisorielle » de la torsion), on prouve en effet (6.16) que le quotient de la torsion de $H^2(X/W)$ par $H^2(X/W)_d$ contient le quotient de l'espace des 1-formes globales fermées par le sous-espace des formes indéfiniment fermées (02.5.1), quotient qui peut être non nul comme le montrent des exemples de Mumford-Oda [56] et W. Lang [44]. L'outil essentiel qu'on utilise dans cette étude est une extension canonique du faisceau des covecteurs de Witt $\text{CW } \mathcal{O}_X$ par le complexe de De Rham-Witt, variante de l'extension universelle de la théorie de Dieudonné cristalline ([50], [10]). Cette extension permet notamment de faire le lien entre le sous-espace $H^2(X/W)_d$ ci-dessus et le sous-espace canonique de $H_{\text{DR}}^1(X/k)$ construit par Oda [56].

A titre d'illustration de la théorie, on décrit, au n° 7, la suite spectrale des pentes de quelques surfaces.

1. LE THÉORÈME DE COMPARAISON.

1.1. Soient S un schéma parfait de car. p , $W = W(S)$, $W_n = W_n(S)$ (01.5). Soit X un S -schéma de type fini. Pour $n \geq 1$, notons $(X/W_n)_{\text{cris}}$ le topos cristallin de X par rapport à W_n , muni de la PD-structure canonique (01.4.3), $u_{X/W_n} : (X/W_n)_{\text{cris}} \rightarrow X_{\text{zar}}$ le morphisme canonique (03.2.2), $\mathcal{O}_{X/W_n}$ le faisceau d'anneaux structural de $(X/W_n)_{\text{cris}}$ (03.2.1). On va définir, pour tout $n \geq 1$, un homomorphisme

$$(1.1.1) \quad R u_{X/W_n*} (\mathcal{L}_{X/W_n}) \rightarrow W_n \Omega_X^\bullet,$$

de $D(f^{-1} W_n \mathcal{O}_S)$ (où $f : X \rightarrow S$ est la projection), de la manière suivante.

Supposons d'abord qu'on puisse plonger X , par une immersion fermée, dans un schéma formel Y lisse sur W , muni d'un W -morphisme $F : Y \rightarrow Y^{(\sigma)} = Y \times_W (W, \sigma)$ relevant le frobenius de $Y \times_W S$. Pour $n \geq 1$, posons $Y_n = Y \times_W W_n$, et notons $\bar{Y}_n$ l'enveloppe à

puissances divisées (compatible aux PD canoniques de W_n) de X dans Y_n . On sait (0 3.2.4) qu'on a un isomorphisme canonique [de $D(f^{-1} W_n \mathcal{O}_S)$]:

$$(1.1.2) \quad R u_{X/W_n*}(\mathcal{O}_{X/W_n}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\bar{Y}_n} \otimes_{\mathcal{O}_{Y_n}} \overset{(0.3.1.6)}{\Omega_{Y_n/W_n}^\bullet} = \Omega_{\bar{Y}_n/W_n, [1]}^\bullet.$$

Par ailleurs, l'homomorphisme composé

$$(1.1.3) \quad \mathcal{O}_Y \xrightarrow{t_F} W(\mathcal{O}_{Y_1}) \rightarrow i_{1*} W(\mathcal{O}_X)$$

où t_F est la flèche de Cartier (0 1.3.20) et la seconde flèche la flèche de fonctorialité associée à l'immersion $i_1 : X \rightarrow Y_1$, envoie $p^n \mathcal{O}_Y$ dans $i_{1*} V^n W(\mathcal{O}_X)$ donc induit un homomorphisme

$$(1.1.4) \quad \mathcal{O}_{Y_n} \rightarrow i_{1*} W_n(\mathcal{O}_X).$$

Comme $t_F : \mathcal{O}_Y \rightarrow W(\mathcal{O}_{Y_1})$ est compatible aux projections naturelles $\mathcal{O}_Y \rightarrow \mathcal{O}_{Y_1}$, $W(\mathcal{O}_{Y_1}) \rightarrow \mathcal{O}_{Y_1}$, (1.1.4) envoie l'idéal de X dans Y_n dans $i_{1*} V W_{n-1}(\mathcal{O}_X)$, donc, grâce à la PD-structure de $V W_{n-1}(\mathcal{O}_X)$, se factorise en un PD-morphisme

$$(1.1.5) \quad \mathcal{O}_{\bar{Y}_n} \rightarrow W_n(\mathcal{O}_X).$$

La formule (I 2.18.6) entraîne (0 3.1.2) que l'homomorphisme composé

$$\Omega_{\bar{Y}_n}^\bullet \rightarrow \Omega_{W_n \mathcal{O}_X}^\bullet \xrightarrow{\pi_n} W_n \Omega_X^\bullet,$$

où la première flèche est l'homomorphisme de complexes de DR défini par (1.1.5) et π_n la flèche canonique (I 1.3), se factorise en un homomorphisme (de W_n -adg) :

$$(1.1.6) \quad \Omega_{\bar{Y}_n, [1]}^\bullet \rightarrow W_n \Omega_X^\bullet.$$

Nous définirons (1.1.1) comme le composé de (1.1.2) et (1.1.6). Ce composé ne dépend pas du choix de (i, F) . En effet, si $i' : X \rightarrow Y'$ est une immersion fermée de X dans un W -schéma formel lisse muni d'un relèvement F' du Frobenius de Y'_1 , soit $j = (i, i') : X \rightarrow Z = Y \times_W Y'$ l'immersion diagonale, et munissons Z du relèvement $G = F \times_W F'$ du Frobenius de Z_1 . D'après [0 3.2.5 (a)], on a un carré commutatif

$$(1.1.7) \quad \begin{array}{ccc} R u_{X/W_n*}(\mathcal{O}_{X/W_n}) & \xrightarrow{\sim} & \Omega_{\bar{Y}_n, [1]}^\bullet \\ \parallel & & \downarrow \\ R u_{X/W_n*}(\mathcal{O}_{X/W_n}) & \xrightarrow{\sim} & \Omega_{\bar{Z}_n, [1]}^\bullet \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les isomorphismes (1.1.2) et la flèche verticale de droite est définie par la projection canonique $p : Z \rightarrow Y$. Comme p est compatible aux relèvements G ,

F, le carré

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_Y & \xrightarrow{t_F} & W(\mathcal{O}_{Y_1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ p_* \mathcal{O}_Z & \xrightarrow{t_G} & p_1 * W(\mathcal{O}_{Z_1}) \end{array}$$

(où les flèches verticales sont les flèches canoniques) est commutatif (0 1.3.19), et par suite il en est de même du carré

$$(1.1.8) \quad \begin{array}{ccc} \Omega_{Y_n, [1]}^\bullet & \rightarrow & W_n \Omega_X^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_{Z_n, [1]}^\bullet & \rightarrow & W_n \Omega_X^\bullet \end{array}$$

où les flèches horizontales sont données par (1.1.6) et la flèche verticale de gauche est la flèche de fonctorialité définie par p . Combinant les carrés (1.1.7) et (1.1.8), on voit que les composés (1.1.1) définis à l'aide de (i, F) et (j, G) sont identiques. De même les composés définis à l'aide de (i', F') et (j, G) sont identiques, ce qui prouve l'indépendance annoncée.

Dans le cas général, choisissons un recouvrement ouvert $\varepsilon_0 : U_0 \rightarrow X$ et une immersion fermée i_0 de U_0 dans un W -schéma formel lisse Y_0 , muni de $F : Y_0 \rightarrow Y_0^{(p)}$ relevant le frobenius de $(Y_0)_1 = Y_0 \times_W S$. On en déduit une immersion fermée $i_* : U_* \hookrightarrow Y_*$, où $U_* = \text{cosq}(U_0/X)$, $Y_* = \text{cosq}(Y_0/W)$. Si $\varepsilon : U_* \rightarrow X$ est la projection, on a un isomorphisme canonique (0 3.2.6.2) :

$$(1.1.9) \quad R u_{X/W_*} * \mathcal{O}_{X/W_*} \xrightarrow{\sim} R \varepsilon_* \Omega_{Y_*, [1]}^\bullet,$$

où $Y_{*,n} = Y_* \times_W W_n$ et $\overline{Y}_{*,n}$ désigne l'enveloppe à puissances divisées de U_* dans $Y_{*,n}$. D'autre part, F se prolonge canoniquement à Y_* et permet de définir un homomorphisme analogue à (1.1.6) :

$$(1.1.10) \quad \Omega_{\overline{Y}_{*,n}, [1]}^\bullet \rightarrow W_n \Omega_{U_*}^\bullet.$$

Par descente cohomologique, on a un isomorphisme canonique

$$(1.1.11) \quad R \varepsilon_* W_n \Omega_{U_*}^\bullet \xrightarrow{\sim} W_n \Omega_X^\bullet,$$

qui, composé avec $R \varepsilon_*$ (1.1.10), fournit une flèche

$$(1.1.12) \quad R \varepsilon_* \Omega_{\overline{Y}_{*,n}, [1]}^\bullet \rightarrow W_n \Omega_X^\bullet.$$

Nous définirons alors (1.1.1) comme composé de (1.1.9) et (1.1.12). A nouveau, ce composé ne dépend pas du choix de (ε_0, i_0, F) . Si $(\varepsilon'_0 : U'_0 \rightarrow X, i'_0 : U'_0 \hookrightarrow Y'_0, F')$ est un

autre choix, on considère $\eta_0 : V_0 = U_0 \times_X U'_0 \rightarrow X$, l'immersion diagonale

$$j_0 = i_0 \times i'_0 : V_0 \hookrightarrow Z_0 = Y_0 \times_W Y'_0, \text{ et } G = F \times_W F'.$$

Un raisonnement analogue à celui fait plus haut montre que les composés de (1.1.9) et (1.1.12) définis à l'aide de (η_0, j_0, G) et (ε_0, i_0, F) [resp. $(\varepsilon'_0, i'_0, F')$] sont identiques. En fait, l'utilisation de relèvements de Frobenius et de la flèche de Cartier t_F n'est pas indispensable : la donnée d'un prolongement à $W_n(U_0)$ de l'inclusion $U_0 \hookrightarrow Y$ (lequel existe dès que le recouvrement U_0 est assez fin) suffit à définir une flèche (1.1.10), d'où une flèche (1.1.1), qui est indépendante des choix et coïncide avec celle définie ci-dessus. Le seul avantage (minime) de l'utilisation des relèvements de Frobenius est de faire voir directement la compatibilité de (1.1.1) aux frobenius [cf. (1.2.3)].

PROPOSITION 1.2. — (a) La flèche (1.1.1) est compatible aux structures multiplicatives des deux membres : on a un carré commutatif

$$(1.2.1) \quad \begin{array}{ccc} R u_{X/W_n*}(\mathcal{O}_{X/W_n}) \overset{L}{\otimes} R u_{X/W_n*}(\mathcal{O}_{X/W_n}) & \longrightarrow & W_n \Omega_X^\bullet \otimes W_n \Omega_X^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ R u_{X/W_n*}(\mathcal{O}_{X/W_n}) & \xrightarrow{(1.1.1)} & W_n \Omega_X^\bullet \end{array}$$

où $\otimes = \overset{f^{-1}W_n \mathcal{O}_S}{\otimes}$, les flèches verticales sont les flèches de produit, et la flèche horizontale supérieure est donnée par le produit tensoriel des flèches (1.1.1) [noter que, d'après (0.3.2.4), on a $R u_{X/W_n*}(\mathcal{O}_{X/W_n}) \in D^b$].

(b) La flèche (1.1.1) est fonctorielle en X : si $g : X' \rightarrow X$ est un S -morphisme, on a un carré commutatif

$$(1.2.2) \quad \begin{array}{ccc} R u_{X/W_n*}(\mathcal{O}_{X/W_n}) & \xrightarrow{(1.1.1)} & W_n \Omega_X^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ R g_* R u_{X'/W_n*}(\mathcal{O}_{X'/W_n}) & \xrightarrow{R g_* (1.1.1)} & R g_* W_n \Omega_{X'}^\bullet \end{array}$$

où les flèches verticales sont les flèches de fonctorialité ([4], III 3.4.1 et (I 1.12.2)). En particulier, (1.1.1) est compatible à l'action de Frobenius : on a un carré commutatif

$$(1.2.3) \quad \begin{array}{ccc} R u_{X/W_n*}(\mathcal{O}_{X/W_n}) & \xrightarrow{(1.1.1)} & W_n \Omega_X^\bullet \\ F \downarrow & & \downarrow F \\ F_* R u_{X^{(p)}/W_n*}(\mathcal{O}_{X^{(p)}/W_n}) & \xrightarrow{F_* (1.1.1)} & F_* W_n \Omega_{X^{(p)}}^\bullet \end{array}$$

où F désigne la flèche définie par Frobenius [cf. (I 2.18.7)].

(c) Pour $m \geq n \geq 1$, on a un carré commutatif

$$(1.2.4) \quad \begin{array}{ccc} R u_{X/W_n*} \mathcal{O}_{X/W_m} & \xrightarrow{(1.1.1)} & W_m \Omega_X^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ R u_{X/W_n*} \mathcal{O}_{X/W_n} & \xrightarrow{(1.1.1)} & W_n \Omega_X^\bullet \end{array}$$

où la flèche verticale de droite (resp. gauche) est la projection canonique

$$\begin{array}{ccc} & (X/W_m)_{\text{cris}} \leftarrow (X/W_n)_{\text{cris}} & \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ \text{(resp. la flèche définie par le triangle commutatif } u_{X/W_m} & & u_{X/W_n} \text{)} \\ & X_{\text{zar}} & \end{array}$$

La flèche verticale de gauche de (1.2.1) est donnée, *via* (1.1.9), par la structure d'adg de $\Omega_{Y_n, [1]}^*$. La commutativité de (1.2.1) résulte donc du fait que (1.1.10) est un homomorphisme d'adg. Si $g : X' \rightarrow X$ est un S-morphisme (de S-schémas de type fini), on peut choisir un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & U'_0 & \xrightarrow{i'_0} & Y'_0 \\ & \swarrow \varepsilon'_0 & \downarrow & \searrow & \downarrow \\ X' & & U_0 & \xrightarrow{i_0} & Y_0 \\ \downarrow g & \swarrow \varepsilon_0 & & \searrow & \downarrow \\ X & & & & W \end{array}$$

où $\varepsilon_0, \varepsilon'_0$ sont des recouvrements ouverts, i_0, i'_0 des immersions fermées, Y_0, Y'_0 des schémas formels lisses sur W , munis de relèvements F, F' du frobenius de $(Y_0)_1, (Y'_0)_1$, de manière que $Y'_0 \rightarrow Y_0$ soit compatible à F, F' . Posant $U_\bullet = \cos q(U_0/X)$, $Y_\bullet = \cos q(Y_0/W)$, $U'_\bullet = \cos q(U'_0/X')$, $Y'_\bullet = \cos q(Y'_0/W)$, on en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} & & U'_\bullet & \xrightarrow{i'_\bullet} & Y'_\bullet \\ & \swarrow \varepsilon'_\bullet & \downarrow & \searrow & \downarrow \\ X' & & U_\bullet & \xrightarrow{i_\bullet} & Y_\bullet \\ \downarrow g & \swarrow \varepsilon_\bullet & & \searrow & \downarrow \\ X & & & & W \end{array}$$

donc, d'après (03.2.6.3), un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} Ru_{X/W_n*} \mathcal{O}_{X/W_n} & \xrightarrow{(1.1.9)} & R\varepsilon_* \Omega_{Y_n}^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ Rg_* Ru_{X'/W_n*} \mathcal{O}_{X'/W_n} & \xrightarrow{Rg_*(1.1.9)} & Rg_* R\varepsilon'_* \Omega_{Y'_n, [1]}^* \end{array}$$

D'autre part, le fait que $Y' \rightarrow Y$, soit compatible à F' , F entraîne qu'on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} R\varepsilon_* \Omega_{Y, [1]}^\bullet & \xrightarrow{(1.1.12)} & W_n \Omega_X^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ Rg_* R\varepsilon'_* \Omega_{Y', [1]}^\bullet & \xrightarrow{Rg_*(1.1.12)} & Rg_* W_n \Omega_{X'}^\bullet \end{array}$$

La commutativité de ces deux carrés implique celle de (1.2.2). La commutativité de (1.2.3) en est un cas particulier, mais on pourrait aussi la déduire du fait que la flèche verticale de gauche de (1.2.3) est donnée, *via* (1.1.9), par l'endomorphisme F de $\Omega_{Y, [1]}^\bullet$ induit par F , et que (1.1.10) est compatible à F . La commutativité de (1.2.4) découle de la compatibilité de (1.1.9) au « changement de base » $W_n \rightarrow W_m$ (03.2.6.4) et du fait que, pour n variable, les flèches (1.1.10) forment un morphisme de systèmes projectifs. Cela achève la démonstration de 1.2.

1.3. Par application de Rf_* et $R\Gamma(X, -)$, on déduit de (1.1.1) des flèches

$$(1.3.1) \quad Rf_{X/W_n*}(\mathcal{O}_{X/W_n}) \rightarrow Rf_*(W_n \Omega_X^\bullet),$$

où

$$f_{X/W_n} = f \circ u_{X/W_n} : (X/W_n)_{\text{cris}} \xrightarrow{u_{X/W_n}} X_{\text{zar}} \xrightarrow{f} (W_n)_{\text{zar}},$$

et

$$(1.3.2) \quad R\Gamma(X/W_n) \rightarrow R\Gamma(X, W_n \Omega_X^\bullet),$$

où $R\Gamma(X/W_n) = R\Gamma((X/W_n)_{\text{cris}}, \mathcal{O}_{X/W_n})$, induisant sur la cohomologie

$$(1.3.3) \quad H^*(X/W_n) \rightarrow H^*(X, W_n \Omega_X^\bullet).$$

D'après 1.2, ces flèches sont compatibles aux structures multiplicatives, fonctorielles en X , et compatibles aux morphismes de transition pour $m \geq n \geq 1$. De plus, on vérifie facilement que (1.3.1) est compatible au changement de base dans le sens suivant : si $f' : X' \rightarrow S'$ est déduit de f par le changement de base $S' \xrightarrow{v} S$, avec S' parfait, on a un carré commutatif

$$(1.3.4) \quad \begin{array}{ccc} Lv^* Rf_{X/W_n*}(\mathcal{O}_{X/W_n}) & \rightarrow & Lv^* Rf_*(W_n \Omega_X^\bullet) \\ a \downarrow & & \downarrow b \\ Rf'_{X'/W_n*}(\mathcal{O}_{X'/W_n}) & \longrightarrow & Rf'_*(W_n \Omega_{X'}^\bullet) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont données par (1.3.1), a est la flèche de changement de base [4], V 3.5.3, et b est la flèche de changement de base définie par l'isomorphisme $W_n \mathcal{O}_{S'} \otimes_{W_n \mathcal{O}_S} W_n \Omega_X^\bullet \rightarrow W_n \Omega_{X'}^\bullet$ (I 1.9.1).

THÉOREME 1.4. — Si $f: X \rightarrow S$ est lisse, les flèches (1.1.1), (1.3.1), (1.3.2) et (1.3.3) sont des isomorphismes.

Il suffit de prouver que (1.1.1) est un isomorphisme. La question est locale sur X , donc on peut supposer X et S affines, $S = \text{Spec}(k)$, $X = \text{Spec}(A)$, et choisir : (a) un relèvement de A en une algèbre B plate sur $W = W(k)$ et p -adiquement complète; (b) un relèvement de l'endomorphisme de Frobenius de A en un endomorphisme F de B sur W , compatible à l'automorphisme σ de W . Pour définir (1.1.1), utilisons le plongement de X dans $Y = \text{Spf}(B)$, muni de F . Posons $B/p^n B = B_n$. L'idéal de A dans B_n est $p B_n$, qui est muni naturellement des PD définies par extension des PD canoniques sur $p W_n$: on a donc $\overline{B}_n = B_n$, et par suite $\Omega_{\overline{B}_n, [\]}^\bullet = \Omega_{B_n}^\bullet$, et (1.1.2) s'écrit :

$$(1.4.1) \quad Ru_{X/W_n*}(\mathcal{O}_{X/W_n}) \xrightarrow{\sim} \Omega_{B_n}^\bullet.$$

D'autre part, on dispose, grâce à F , de l'application $t_F: B \rightarrow W(A)$, qui induit $B_n \rightarrow W_n A$, d'où

$$(1.4.2) \quad \Omega_{B_n}^\bullet \rightarrow W_n \Omega_A^\bullet.$$

La flèche (1.1.1) est composée de (1.4.1) et (1.4.2), donc il s'agit de prouver que (1.4.2) est un quasi-isomorphisme. Si l'on pose $\Omega_B^\bullet = \varprojlim \Omega_{B_n}^\bullet$, il revient au même de prouver que la limite projective des flèches (1.4.2) :

$$(1.4.3) \quad \Omega_B^\bullet \rightarrow W \Omega_A^\bullet,$$

induit un quasi-isomorphisme sur les gradués associés pour la filtration p -adique de $\Omega_B^\bullet$ et la filtration Fil de $W \Omega_A^\bullet$. Or le carré

$$\begin{array}{ccc} \Omega_B^\bullet & \xrightarrow{(1.4.3)} & W \Omega_A^\bullet \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_A^\bullet & \xrightarrow{\sim} & \text{gr}^0 W \Omega_A^\bullet \end{array}$$

où la flèche horizontale inférieure est l'isomorphisme canonique (I 3.1.2) et les flèches verticales les projections canoniques, est commutatif, les deux composés étant des homomorphismes d'adg induisant la projection $B \rightarrow A$ en degré 0. Il en résulte qu'on a, pour tout $n \geq 0$, un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \Omega_A^\bullet & \xrightarrow{\sim} & \text{gr}^0 W \Omega_A^\bullet \\ p^n \downarrow & & \downarrow p^n \\ p^n \Omega_B^\bullet / p^{n+1} \Omega_B^\bullet & \xrightarrow{(1.4.2)} & \text{gr}^n W \Omega_A^\bullet \end{array}$$

où la flèche horizontale supérieure est l'isomorphisme canonique et la flèche verticale de gauche (resp. droite) associée à $x \in \Omega_A^\bullet$ la classe de $p^n y$, où $y \in \Omega_B^\bullet$ (resp. $W \Omega_A^\bullet$) relève x . Or la

flèche verticale de gauche est un isomorphisme, et, d'après (I 3.14), la flèche verticale de droite est un quasi-isomorphisme, donc la flèche horizontale inférieure est un quasi-isomorphisme, ce qui achève la démonstration.

Remarques 1.5. — (a) Si f est lisse, les flèches verticales de (1.3.4) sont des isomorphismes.

Cela résulte de 1.4 et du théorème de changement de base [4], V 3.5.2. On peut aussi le démontrer directement en se ramenant à X et S affines et utilisant le quasi-isomorphisme (1.4.3).

(b) Notons $W_{n,\sigma}[F]$ l'anneau de polynômes non commutatif où $Fa = a^\sigma$. L'endomorphisme F de $W_n \Omega_X^\bullet$ permet de définir un objet de $D(W_{n,\sigma}[F])$ dont $Rf_*(W_n \Omega_X^\bullet)$ est l'image par le foncteur d'oubli dans $D(W_n)$. Si f est lisse, la donnée de cet objet de $D(W_{n,\sigma}[F])$ est donc un peu plus fine que celle de $Rf_{X/W_n*}(\mathcal{O}_{X/W_n})$ muni de

$$F : \sigma^* Rf_{X/W_n*}(\mathcal{O}_{X/W_n}) \rightarrow Rf_{X/W_n*}(\mathcal{O}_{X/W_n}).$$

(c) Supposons f lisse. Pour $m \geq n \geq 1$, la flèche

$$(1.5.1) \quad Rf_* W_m \Omega_X^\bullet \otimes_{W_m \mathcal{O}_S}^L W_n \mathcal{O}_S \rightarrow Rf_* W_n \Omega_X^\bullet,$$

adjointe de la flèche $Rf_* W_m \Omega_X^\bullet \rightarrow Rf_* W_n \Omega_X^\bullet$ [de $D(W_m)$] définie par la projection canonique $W_m \Omega_X^\bullet \rightarrow W_n \Omega_X^\bullet$, est un isomorphisme.

Compte tenu de (1.2.4), cela découle de 1.4 et du fait [4], V 3.5.2, que la flèche de changement de base

$$Rf_{X/W_n*} \mathcal{O}_{X/W_n} \otimes_{W_n \mathcal{O}_S}^L W_n \mathcal{O}_S \rightarrow Rf_{X/W_n*} \mathcal{O}_{X/W_n}$$

est un isomorphisme. On peut aussi le prouver directement comme en (a).

2. RÉSULTATS DE FINITUDE. — Dans ce numéro, X désigne un schéma propre et lisse sur un corps parfait k de car. p . On pose $W(k) = W$, $W_n(k) = W_n$. Si L est un complexe de faisceaux abéliens sur X , on écrira $R\Gamma(L)$ [resp. $H^i(L)$] pour $R\Gamma(X, L)$ [resp. $H^i(X, L)$].

A. Topologie standard des $H^j(W \Omega_X^i)$.

PROPOSITION 2.1. — Soient $i, j \in \mathbb{Z}$.

(a) Pour tout n , $H^j(W_n \Omega_X^i)$ est de longueur finie, et les flèches canoniques

$$(2.1.1) \quad R\Gamma(W \Omega_X^i) \rightarrow \varprojlim R\Gamma(W_n \Omega_X^i),$$

$$(2.1.2) \quad H^j(W \Omega_X^i) \rightarrow \varprojlim H^j(W_n \Omega_X^i)$$

sont des isomorphismes.

(b) Soit $r \geq 0$. Pour tout n , $H^j(W_{n+r} \Omega_X^i / V^r W_n \Omega_X^i)$, $H^j(W_n \Omega_X^i / p^r W_n \Omega_X^i)$, $H^j(W_n \Omega_X^i / F^r W_{n+r} \Omega_X^i)$ sont de longueur finie, et les flèches canoniques

$$(2.1.3) \quad H^j(W \Omega_X^i / V^r W \Omega_X^i) \rightarrow \varprojlim H^j(W_{n+r} \Omega_X^i / V^r W_n \Omega_X^i),$$

$$(2.1.4) \quad H^j(W\Omega_X^i/p^r W\Omega_X^i) \rightarrow \varprojlim H^j(W_n\Omega_X^i/p^r W_n\Omega_X^i),$$

$$(2.1.5) \quad H^j(W\Omega_X^i/F^r W\Omega_X^i) \rightarrow \varprojlim H^j(W_n\Omega_X^i/F^r W_{n+r}\Omega_X^i)$$

sont des isomorphismes, grâce auxquels la suite exacte longue associée à la suite exacte (I 3.6) :

$$0 \rightarrow W\Omega_X^i/V^r W\Omega_X^i \xrightarrow{F^r} W\Omega_X^i/p^r W\Omega_X^i \rightarrow W\Omega_X^i/F^r W\Omega_X^i \rightarrow 0$$

$$(\text{resp. } 0 \rightarrow W\Omega_X^i/F^r W\Omega_X^i \xrightarrow{V^r} W\Omega_X^i/p^r W\Omega_X^i \rightarrow W\Omega_X^i/V^r W\Omega_X^i \rightarrow 0)$$

s'identifie à la limite projective des suites exactes longues associées à la suite exacte de pro-objets (I 3.5) :

$$0 \rightarrow W.\Omega_X^i/V^r W.\Omega_X^i \xrightarrow{F^r} W.\Omega_X^i/p^r W.\Omega_X^i \rightarrow W.\Omega_X^i/F^r W.\Omega_X^i \rightarrow 0$$

$$(\text{resp. } 0 \rightarrow W.\Omega_X^i/F^r W.\Omega_X^i \xrightarrow{V^r} W.\Omega_X^i/p^r W.\Omega_X^i \rightarrow W.\Omega_X^i/V^r W.\Omega_X^i \rightarrow 0).$$

De même, la suite exacte longue associée à la suite exacte (loc. cit.) :

$$0 \rightarrow W\Omega_X^i \xrightarrow{V^r} W\Omega_X^i \rightarrow W\Omega_X^i/V^r W\Omega_X^i \rightarrow 0$$

(resp. la suite exacte analogue avec p^r, F^r) s'identifie par (2.1.2) et (2.1.3) [resp. (2.1.4), (2.1.5)] à la limite projective des suites exactes longues associées à la suite exacte de pro-objets (loc. cit.) :

$$0 \rightarrow W.\Omega_X^i \xrightarrow{V^r} W.\Omega_X^i \rightarrow W.\Omega_X^i/V^r W.\Omega_X^i \rightarrow 0$$

(resp. la suite exacte analogue avec p^r, F^r).

Si $U = \text{Spec}(A)$ est un ouvert affine de X , on a $\Gamma(U, W_n\Omega_X^i) = W_n\Omega_A^i$ (I 1.13.1), et le système projectif $W.\Omega_A^i$ est strict. Il s'ensuit que la flèche canonique $W\Omega_X^i \rightarrow \varprojlim W_n\Omega_X^i$ est un isomorphisme, donc aussi la flèche (2.1.1), qui s'en déduit par application de $R\Gamma$ et de l'isomorphisme $R\Gamma R\varprojlim \xrightarrow{\sim} R\varprojlim R\Gamma$. X étant lisse sur k , le gradué associé à $W_n\Omega_X^i$ pour la filtration canonique (I 3.1.1) est localement libre de type fini sur X (I 3.9). En particulier, $W_n\Omega_X^i$ est de type fini sur $W_n\mathcal{O}_X$. Mais, comme X est propre sur k , l'espace annelé $W_n(X) = (X, W_n\mathcal{O}_X)$ est un schéma propre sur $W_n(0.1.5.6)$. Par suite, $H^j(W_n\Omega_X^i)$ est de longueur finie. Le système projectif $H^j(W.\Omega_X^i)$ vérifie donc la condition de Mittag-Leffler (ML en abrégé), donc $R^q\varprojlim H^j(W.\Omega_X^i) = 0$ pour $q > 0$, et (2.1.1) fournit l'isomorphisme (2.1.2), ce qui prouve (a). D'après (I 1.5.1), V^r définit une application $W_{n+r}\mathcal{O}_X$ -linéaire $F_*^r W_n\Omega_X^i \rightarrow W_{n+r}\Omega_X^i$, donc, d'après ce qu'on vient de voir, $W_{n+r}\Omega_X^i/V^r W_n\Omega_X^i$ est un $W_{n+r}\mathcal{O}_X$ -module de type fini, et $H^j(W_{n+r}\Omega_X^i/V^r W_n\Omega_X^i)$ est de longueur finie. On prouve de manière analogue que $H^j(W_n\Omega_X^i/p^r W_n\Omega_X^i)$, $H^j(W_n\Omega_X^i/F^r W_{n+r}\Omega_X^i)$ sont de longueur finie, et par le même argument qu'en (a), on en déduit que (2.1.3), (2.1.4) et (2.1.5) sont des isomorphismes. Les autres

assertions de (b) résultent de ce que la limite d'un système projectif de suites exactes de groupes abéliens vérifiant ML est exacte.

COROLLAIRE 2.2. — *Les isomorphismes (I 3.11.3, 3.11.5) :*

$$W_\bullet \Omega_X^i / VW_\bullet \Omega_X^i \xrightarrow{\sim} Z_\bullet \Omega_X^i, \quad W_\bullet \Omega_X^i / FW_\bullet \Omega_X^i \xrightarrow{\sim} B_\bullet \Omega_X^{i+1}$$

induisent des isomorphismes

$$(2.2.1) \quad H^j(W_\bullet \Omega_X^i / VW_\bullet \Omega_X^i) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_C H^j(Z_n \Omega_X^i),$$

$$(2.2.2) \quad H^j(W_\bullet \Omega_X^i / FW_\bullet \Omega_X^i) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_C H^j(B_n \Omega_X^{i+1}),$$

où les limites aux seconds membres sont prises suivant l'opération de Cartier C, et la limite des suites exactes longues associées à la suite exacte de pro-objets $0 \rightarrow W_\bullet \Omega_X^{i-1} / FW_\bullet \Omega_X^{i-1} \xrightarrow{d^V} W_\bullet \Omega_X^i / VW_\bullet \Omega_X^i \rightarrow \Omega_X^i \rightarrow 0$ (I 3.19) est la suite exacte longue associée à la suite (I 3.19.2.1) :

$$\dots \rightarrow H^j(W_\bullet \Omega_X^{i-1} / FW_\bullet \Omega_X^{i-1}) \xrightarrow{d^V} H^j(W_\bullet \Omega_X^i / VW_\bullet \Omega_X^i) \rightarrow H^j(\Omega_X^i) \rightarrow \dots$$

C'est un cas particulier de 2.1 (b).

DÉFINITION 2.3. — *La filtration sur $H^j(W_\bullet \Omega_X^i)$ définie par les sous-groupes*

$$\text{Fil}^n H^j(W_\bullet \Omega_X^i) = \text{Ker } H^j(W_\bullet \Omega_X^i) \rightarrow H^j(W_n \Omega_X^i)$$

sera dite filtration canonique, et la topologie correspondante, séparée et complète d'après (2.1.2), sera appelée topologie standard.

Quand on parlera de notions topologiques relatives à $H^j(W_\bullet \Omega_X^i)$ sans préciser, il s'agira, sauf mention du contraire, de la topologie standard.

COROLLAIRE 2.4. — *Pour tout $r \geq 0$, les endomorphismes V^r, p^r, F^r de $H^j(W_\bullet \Omega_X^i)$ (induits par les endomorphismes V^r, p^r, F^r de $W_\bullet \Omega_X^i$) sont d'image fermée.*

En effet, $V^r H^j(W_\bullet \Omega_X^i)$ est le noyau de l'application $H^j(W_\bullet \Omega_X^i) \rightarrow H^j(W_\bullet \Omega_X^i / V^r W_\bullet \Omega_X^i)$, qui, d'après 2.1 (b), s'identifie à la limite projective des applications

$$H^j(W_{n+r} \Omega_X^i) \rightarrow H^j(W_{n+r} \Omega_X^i / V^r W_n \Omega_X^i).$$

Donc ce noyau est fermé. On raisonne de même avec p^r, F^r .

COROLLAIRE 2.5. — *$H^j(W_\bullet \Omega_X^i)$ est séparé et complet pour la topologie p -adique (resp. V -adique) [définie par les sous-groupes $p^n H^j(W_\bullet \Omega_X^i)$, resp. $V^n H^j(W_\bullet \Omega_X^i)$].*

On a $p^n H^j(W_\bullet \Omega_X^i) \subset V^n H^j(W_\bullet \Omega_X^i) \subset \text{Fil}^n H^j(W_\bullet \Omega_X^i)$, donc la topologie p -adique est plus fine que la topologie V -adique, elle-même plus fine que la topologie standard.

Comme $p^n H^j(W\Omega_X^i)$ est fermé pour la topologie standard, le corollaire résulte de (Bourbaki, *Topologie générale*, chap. III, § 3, n° 5, prop. 9).

Remarque 2.6. — Nous verrons plus loin (7.1, 7.2) que $p H^j(W\Omega_X^i)$ [resp. $VH^j(W\Omega_X^i)$] n'est pas nécessairement ouvert dans $H^j(W\Omega_X^i)$ pour la topologie standard.

B. *Perfection de $R\Gamma(W\Omega_X^\bullet)$.*

THÉORÈME 2.7. — $R\Gamma(W\Omega_X^\bullet)$ est un complexe parfait de W -modules, d'amplitude parfaite $\subset [0, 2N]$ (SGA 6 I 5.8) si $\dim(X) \leq N$. Pour tout $n \geq 1$, les flèches canoniques de $D(W_n)$:

$$(2.7.1) \quad R\Gamma(W\Omega_X^\bullet) \otimes_{W_n}^L W_n \rightarrow R\Gamma(W\Omega_X^\bullet \otimes W_n) \rightarrow R\Gamma(W_n\Omega_X^\bullet)$$

sont des isomorphismes.

Pour $m \geq n \geq 1$, la flèche canonique (1.5.1) :

$$R\Gamma(W_m\Omega_X^\bullet) \otimes_{W_m}^L W_n \rightarrow R\Gamma(W_n\Omega_X^\bullet)$$

est un isomorphisme, X étant lisse sur k . D'autre part, si $\dim(X) \leq N$, $R\Gamma(W_1\Omega_X^\bullet) = R\Gamma(\Omega_X^\bullet)$ est d'amplitude parfaite $\subset [0, 2N]$. Enfin, d'après 2.1 (a), la flèche canonique [de $D(W)$] :

$$(2.7.2) \quad R\Gamma(W\Omega_X^\bullet) \rightarrow \varprojlim R\Gamma(W_n\Omega_X^\bullet)$$

est un isomorphisme. D'après [11], B 5.1, B 6, B 7, ces propriétés entraînent que $R\Gamma(W\Omega_X^\bullet)$ et, pour tout n , $R\Gamma(W_n\Omega_X^\bullet)$ sont d'amplitude parfaite $\subset [0, 2N]$, et que la flèche composée de (2.7.1) est un isomorphisme. Le théorème en résulte, car la projection $W\Omega_X^\bullet \otimes W_n = W\Omega_X^\bullet / p^n W\Omega_X^\bullet \rightarrow W_n\Omega_X^\bullet$ est un quasi-isomorphisme (3.17.3).

Scholie 2.8. — Compte tenu du théorème de comparaison 1.4, l'énoncé précédent redonne le théorème de finitude de Berthelot ([4], V 1.1.5 et [11], 7.24) : la cohomologie cristalline de X/W :

$$(2.8.1) \quad H^*(X/W) \xrightarrow{\text{dfn}} \varprojlim H^*(X/W_n)$$

[où $H^*(X/W_n) = H^*(X/W_n, \mathcal{O}_{X/W_n})$] apparaît comme cohomologie d'un complexe parfait

$$(2.8.2) \quad R\Gamma(X/W) \stackrel{\text{dfn}}{=} R\Gamma(W\Omega_X^\bullet),$$

tel que le système projectif correspondant $R\Gamma(X/W) \otimes_{W_n}^L W_n$ soit canoniquement isomorphe au système projectif $R\Gamma(X/W_n)$.

De plus, $W\Omega_X^\bullet$ est muni de l'endomorphisme de complexes F défini par $p^i F$ en degré i (I 2.19), et, si X est purement de dimension N , de l'endomorphisme de complexes V , défini par $p^{N-i-1} V$ en degré $i \leq N-1$ et F^{-1} en degré N [I 2.19, 3.7(b)]. Ces endomorphismes vérifient :

$$(2.8.3) \quad FV = VF = p^N,$$

et, pour $a \in W$, $Fa = a^\sigma F$, $aV = Va^\sigma$. $R\Gamma(W\Omega_X^i)$ est donc sous-jacent à un complexe de modules sur l'anneau de Dieudonné de niveau N $W_\sigma[F, V; N]$, où les relations sont $FV = VF = p^N$, $Fa = a^\sigma F$, $aV = Va^\sigma$. L'action de F donne l'opération de Frobenius sur la cohomologie cristalline

$$(2.8.4) \quad F : \sigma^* R\Gamma(X/W) \rightarrow R\Gamma(X/W).$$

Les $H^i(X/W)$ étant des modules sur $W_\sigma[F, V; N]$, on retrouve notamment le fait que les $H^i(X/W)/p$ -torsion sont des F -cristaux de niveau $\leq N$, dans la terminologie d'Ogus [59].

C. *Finitude modulo torsion des $H^j(W\Omega_X^i)$.*

2.9. Si L est un complexe d'une catégorie abélienne, notons, pour $i \in \mathbb{Z}$:

$$(2.9.1) \quad \begin{cases} L^{\geq i} = (0 \rightarrow L^i \rightarrow L^{i+1} \rightarrow \dots), \\ L^{\leq i} = (\dots \rightarrow L^{i-1} \rightarrow L^i \rightarrow 0), \end{cases}$$

les complexes tronqués naïfs. Pour $i \geq 0$, l'homomorphisme

$$(2.9.2) \quad V_i : W\Omega_X^{\leq i} \rightarrow W\Omega_X^{\leq i},$$

égal à $p^{i-j}V$ en degré j , est, en vertu de (I2.19), un homomorphisme de complexes. On a $V_0 = V$, et, pour tout $i \geq 0$, on a un homomorphisme de suites exactes

$$(2.9.3) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & W\Omega_X^{i+1}[-i-1] & \rightarrow & W\Omega_X^{\leq i+1} & \rightarrow & W\Omega_X^{\leq i} \rightarrow 0 \\ & & \downarrow V & & \downarrow V_{i+1} & & \downarrow pV_i \\ 0 & \rightarrow & W\Omega_X^{i+1}[-i-1] & \rightarrow & W\Omega_X^{\leq i+1} & \rightarrow & W\Omega_X^{\leq i} \rightarrow 0 \end{array}$$

On notera V_i l'endomorphisme de $R\Gamma(W\Omega_X^{\leq i})$ défini par (2.9.2).

PROPOSITION 2.10 (cf. [2], III 2.6). — *Quels que soient i, j :*

- (a) $H^j(W\Omega_X^{\leq i}/V_i W\Omega_X^{\leq i})$ est un W -module de longueur finie;
- (b) $H^j(W\Omega_X^{\leq i})$ est séparé et complet pour la topologie p -adique (resp. V_i -adique, définie par la filtration $V_i^n H^j(W\Omega_X^{\leq i})$).

Notons V_i l'endomorphisme du pro-objet $W\Omega_X^{\leq i}$ défini par $p^{i-n}V$ en degré m . Grâce à (I3.5), on a, pour $i \geq 1$, une suite exacte de pro-objets

$$(2.10.1) \quad \begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & W\mathcal{O}_X/p^{i-1}VW\mathcal{O}_X & \rightarrow & \dots & \rightarrow & W\Omega_X^{i-1}/VW\Omega_X^{i-1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow p & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & W\mathcal{O}_X/p^iVW\mathcal{O}_X & \rightarrow & \dots & \rightarrow & W\Omega_X^{i-1}/pW\Omega_X^{i-1} \rightarrow W\Omega_X^i/V \rightarrow 0 \\ & & \downarrow p & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & W\mathcal{O}_X/pW\mathcal{O}_X & \rightarrow & \dots & \rightarrow & W\Omega_X^{i-1}/pW\Omega_X^{i-1} \rightarrow W\Omega_X^i/V \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

que nous écrirons

$$0 \rightarrow W.\Omega_X^{\leq i-1}/V_{i-1}W.\Omega_X^{\leq i-1} \rightarrow W.\Omega_X^{\leq i}/V_iW.\Omega_X^{\leq i} \rightarrow M_*(i) \rightarrow 0.$$

On en déduit une suite exacte longue (de pro-objets) :

$$(2.10.2) \quad \dots \rightarrow H^j(W.\Omega_X^{\leq i-1}/V_{i-1}W.\Omega_X^{\leq i-1}) \rightarrow H^j(W.\Omega_X^{\leq i}/V_iW.\Omega_X^{\leq i}) \rightarrow H^j(M_*(i)) \rightarrow \dots$$

On voit comme en 2.1 que les termes de cette suite sont des systèmes projectifs de modules de longueur finie, et que les flèches canoniques

$$H^j(W.\Omega_X^{\leq i}/V_iW.\Omega_X^{\leq i}) \rightarrow \varprojlim H^j(W.\Omega_X^{\leq i}/V_iW.\Omega_X^{\leq i})$$

sont des isomorphismes. L'assertion (a) est vraie pour $i=0$, car $W.\mathcal{O}_X/VW.\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X$. La limite projective de (2.10.2) étant une suite exacte, il suffit donc, par récurrence, de prouver que les modules $\varprojlim H^j(M_*(i))$ sont de longueur finie. Mais, d'après (I 3.20), la projection naturelle $M_*(i) \rightarrow \Omega_X^{\leq i}$ est un quasi-isomorphisme, de sorte que $H^j(M_*(i))$ est constant de valeur $H^j(\Omega_X^{\leq i})$, qui est de dimension finie sur k , d'où (a). D'après 2.1, $H^j(W.\Omega_X^{\leq i})$ est séparé et complet pour la topologie, que nous appellerons standard, définie par la filtration $\text{Fil}^n H^j(W.\Omega_X^{\leq i}) = \text{Ker } H^j(W.\Omega_X^{\leq i}) \rightarrow H^j(W_n.\Omega_X^{\leq i})$. On a

$$p^{n(i+1)} H^j(W.\Omega_X^{\leq i}) \subset V_i^n H^j(W.\Omega_X^{\leq i}) \subset \text{Fil}^n H^j(W.\Omega_X^{\leq i}),$$

donc la topologie p -adique est plus fine que la topologie V_i -adique, qui est plus fine que la topologie standard. On voit comme en 2.4 que les $p^r H^j(W.\Omega_X^{\leq i})$ sont fermés pour la topologie standard, et l'on en conclut comme en 2.5, que la topologie p -adique (resp. V_i -adique) est séparée et complète, ce qui achève la démonstration.

N.B. : La démonstration de (a) est calquée sur celle de Bloch (*loc. cit.*).

D'après 2.10(b), l'opération de V_i sur $H^j(W.\Omega_X^{\leq i})$ munit $H^j(W.\Omega_X^{\leq i})$ d'une structure de module séparé et complet sur l'anneau de séries formelles non commutatif $W_\sigma[[V]]$, où les relations sont $aV = Va^\sigma$, muni de la topologie V -adique. Comme, d'après 2.10 (a), $H^j(W.\Omega_X^{\leq i})/V_i H^j(W.\Omega_X^{\leq i})$, qui s'injecte dans $H^j(W.\Omega_X^{\leq i}/V_i W.\Omega_X^{\leq i})$, est de longueur finie sur W , *a fortiori* de type fini, $H^j(W.\Omega_X^{\leq i})$ est donc de type fini sur $W_\sigma[[V]]$, en résumé :

COROLLAIRE 2.11. — *Quels que soient i, j , $H^j(W.\Omega_X^{\leq i})$ est un $W_\sigma[[V]]$ -module de type fini, et $H^j(W.\Omega_X^{\leq i})/VH^j(W.\Omega_X^{\leq i})$ est de longueur finie sur W .*

Remarque 2.12. — L'endomorphisme F induit sur $W.\Omega_X^{\leq i}$ par l'endomorphisme F de $W.\Omega_X$ vérifie $FV_i = V_i F = p^{i+1}$. L'endomorphisme correspondant de $H^j(W.\Omega_X^{\leq i})$, joint à V_i , fait de $H^j(W.\Omega_X^{\leq i})$ un module sur l'anneau $W_\sigma[[V]][F]$ (où les relations sont $FV = VF = p^{i+1}$, $Fa = a^\sigma F$, $aV = Va^\sigma$). En particulier, le sous-module de p -torsion de $H^j(W.\Omega_X^{\leq i})$ contient le sous-module de V -torsion. D'après un lemme de Bloch [12], III 2.4, les propriétés 2.11 impliquent que le quotient de $H^j(W.\Omega_X^{\leq i})$ par le sous-module de p -torsion est de type fini sur W : en d'autres termes, $H^j(W.\Omega_X^{\leq i})$, en tant que

W-module, est somme directe d'un W-module libre de type fini et d'un W-module de torsion sous-jacent à un $W_\sigma[[V]]$ -module de type fini (en particulier, annulé par une puissance de p).

THÉORÈME 2.13 (cf. [12], III 2.2). — *Quels que soient i, j , le sous-module de p -torsion T^{ij} de $H^j(W\Omega_X^i)$ est annulé par une puissance de p , et $H^j(W\Omega_X^i)/T^{ij}$ est un W-module libre de type fini.*

Compte tenu des résultats précédents, on peut recopier la démonstration de (*loc. cit.*). Dans la suite exacte longue déduite de (2.9.3) :

$$(\star) \quad \dots \rightarrow H^{j+i-1}(W\Omega_X^{\leq i-1}) \rightarrow H^j(W\Omega_X^i) \rightarrow H^{j+i}(W\Omega_X^{\leq i}) \rightarrow \dots,$$

les termes $H^*(W\Omega_X^{\leq i-1})$ et $H^*(W\Omega_X^{\leq i})$ sont, d'après 2.12, sommes d'un W-module libre de type fini et d'un W-module de torsion annulé par une puissance de p . Le théorème résulte donc du lemme suivant, dont nous laissons la vérification en exercice (cf. *loc. cit.*) :

LEMME 2.14. — *La propriété pour un W-module d'être somme d'un W-module libre de type fini et d'un W-module de torsion annulé par une puissance de p est stable par sous-objet, quotient, et extension.*

Remarques 2.15. — (a) Le quotient $H^j(W\Omega_X^i)/T^{ij}$, muni des opérateurs F et V déduits des opérateurs F et V sur $W\Omega_X^i$, est donc le module de Cartier d'un groupe formel lisse p -divisible G_X^{ij} (« module de Cartier » signifie module des courbes typiques, l'opération V correspond au frobenius $G_X^{ij} \rightarrow G_X^{ij(p)}$). Quand le foncteur Φ_X^i d'Artin-Mazur [2], défini par les déformations de $H^i(-, \mathbb{G}_m)$, est représentable par un groupe formel lisse, son module de Cartier est $H^i(W\mathcal{O}_X)$, qui est sans V -torsion, et G_X^{0i} est le quotient de Φ_X^i par sa partie unipotente. Nous examinerons plus loin la question de la dimension des G_X^{ij} .

(b) La suite exacte $(\star)$ considérée dans la démonstration de 2.13 est, d'après (2.9.3), une suite exacte de $W_\sigma[[V]]$ -modules, lorsqu'on fait opérer V sur $H^*(W\Omega_X^{\leq i})$ par V_i , sur $H^*(W\Omega_X^{\leq i-1})$ par pV_{i-1} , et sur $H^*(W\Omega_X^i)$ par V . Comme Bloch le fait observer (*loc. cit.*), cela ne permet pas d'en déduire que $H^*(W\Omega_X^i)$ est de type fini sur $W_\sigma[[V]]$. En fait, comme nous verrons (7.1, 7.2), il est facile de construire des exemples où $H^*(W\Omega_X^i)$ n'est pas de type fini sur $W_\sigma[[V]]$. Toutefois, j'ignore si les $H^j(W\Omega_X^i)/V$ -torsion sont de type fini sur $W_\sigma[[V]]$.

D. Cas de finitude sur W des $H^j(W\Omega_X^i)$.

PROPOSITION 2.16. — *Soient $i, j \in \mathbb{Z}$. Si la dimension de $H^j(Z_n\Omega_X^i)$ est bornée, $H^j(W\Omega_X^i)/VH^j(W\Omega_X^i)$ est de dimension finie. Si de plus la dimension de $H^j(B_n\Omega_X^{i+1})$ est bornée, $H^j(W\Omega_X^i)$ est de type fini sur W .*

Comme la limite d'un système projectif de k -espaces vectoriels de dimension bornée est de dimension finie, et que $H^j(W\Omega_X^i)/VH^j(W\Omega_X^i)$ s'injecte dans $H^j(W\Omega_X^i/VW\Omega_X^i)$, la première assertion découle de l'isomorphisme (2.2.1). Pour la seconde, comme $H^j(W\Omega_X^i)$ est p -adiquement séparé et complet (2.5), il suffit de vérifier que $H^j(W\Omega_X^i)/pH^j(W\Omega_X^i)$ est de dimension finie sur k . Sachant déjà que $H^j(W\Omega_X^i)/VH^j(W\Omega_X^i)$ est de dimension finie, il revient au même de vérifier que $H^j(W\Omega_X^i)/FH^j(W\Omega_X^i)$ est de dimension finie, ce qui résulte cette fois de l'isomorphisme (2.2.2).

COROLLAIRE 2.17. — Pour tout i , $H^0(W\Omega_X^i)$ est un W -module libre de type fini.

On a en effet $H^0(Z_n\Omega_X^i) \subset H^0(\Omega_X^i)$, $H^0(B_n\Omega_X^{i+1}) \subset H^0(\Omega_X^{i+1})$, d'où la finitude. D'autre part, $W\Omega_X^i$ étant sans p -torsion (I 3.6), il en est de même de $H^0(W\Omega_X^i)$.

COROLLAIRE 2.18. — Supposons X purement de dimension N . Alors, pour tout i , $H^i(W\Omega_X^N)$ est un W -module de type fini, dont F est un automorphisme.

On a, pour tout n , $Z_n\Omega_X^N = \Omega_X^N$, donc, d'après 2.16, $H^i(W\Omega_X^N)$ est de type fini sur W . La deuxième assertion découle de ce que l'endomorphisme F du pro-objet $W\Omega_X^N$ est un automorphisme [I 3.7 (b)].

Citons encore le résultat suivant, dû à Serre [66], n° 7, prop. 4 :

PROPOSITION 2.19. — $H^1(W\mathcal{O}_X)$ est un W -module libre de type fini.

Rappelons brièvement la démonstration donnée en (*loc. cit.*). Pour la finitude, il suffit, compte tenu de 2.11, de vérifier que $H^1(W\mathcal{O}_X)/FH^1(W\mathcal{O}_X)$ est de dimension finie sur k . Or on a $H^1(W\mathcal{O}_X)/FH^1(W\mathcal{O}_X) = \varprojlim H^1(W_n\mathcal{O}_X)/FH^1(W_n\mathcal{O}_X)$, et la suite exacte de cohomologie associée à $0 \rightarrow W_n\mathcal{O}_X \xrightarrow{F} W_n\mathcal{O}_X \rightarrow W_n\mathcal{O}_X/FW_n\mathcal{O}_X \rightarrow 0$ entraîne

$$\begin{aligned} \dim H^1(W_n\mathcal{O}_X)/FH^1(W_n\mathcal{O}_X) \\ = \dim H^0(W_n\mathcal{O}_X/FW_n\mathcal{O}_X) \stackrel{(13.11.5)}{=} \dim H^0(B_n\Omega_X^1) \leq \dim H^0(\Omega_X^1), \end{aligned}$$

d'où la finitude. Par ailleurs, on voit facilement que les endomorphismes F et V de $H^1(W\mathcal{O}_X)$ sont injectifs, d'où la conclusion.

Remarque 2.20. — D'après Oda ([56], 4.4) et la dualité entre modules de Cartier et modules de Dieudonné (*cf.* par exemple [17], [24]), $H^1(W\mathcal{O}_X)$ est le module de Cartier du groupe formel p -divisible $(\text{Pic}_{X/k})_{\text{red}}^\wedge$.

3. SUITE SPECTRALE DES PENTES. — On conserve les hypothèses et notations du n° 2. On note K le corps des fractions de W .

A. Dégénérescence modulo torsion.

3.1. Compte tenu du théorème de comparaison (1.4, 2.8), la filtration de $W\Omega_X^\bullet$ par les $W\Omega_X^{\geq i}$ (2.9.1) donne naissance à une suite spectrale

$$(3.1.1) \quad E_1^{ij} = H^j(W\Omega_X^i) \Rightarrow H^*(X/W).$$

La filtration canonique de l'aboutissement sera notée

$$(3.1.2) \quad P^i H^*(X/W) \stackrel{\text{dfn}}{=} \text{Im } H^*(W\Omega_X^{\geq i}) \rightarrow H^*(W\Omega_X^\bullet) \simeq H^*(X/W).$$

On a donc

$$(3.1.3) \quad P^i H^n / P^{i+1} H^n = E_\infty^{i, n-i}$$

$$(H^n = H^n(X/W)).$$

L'endomorphisme F de $W\Omega_X^\bullet$ (2.8) laisse stables les $W\Omega_X^{\geq i}$, donc induit un endomorphisme F de la suite spectrale (3.1.1), coïncidant, sur l'aboutissement $H^*(X/W)$, avec l'endomorphisme de Frobenius. Par définition, F induit sur $W\Omega_X^{\geq i}$ un endomorphisme divisible par p^i : on a donc, pour tout i :

$$(3.1.4) \quad F(P^i H^*(X/W)) \subset p^i P^i H^*(X/W).$$

D'autre part, les endomorphismes F et V des $W\Omega_X^i$ induisent des endomorphismes F et V du terme E_1 , vérifiant les relations $FV = VF = p$, $Fa = a^\sigma F$, $aV = Va^\sigma$ ($a \in W$), et

$$(3.1.5) \quad Fd_1 V = d_1$$

[où $d_1 : H^j(W\Omega_X^i) \rightarrow H^j(W\Omega_X^{i+1})$], donc aussi

$$(3.1.6) \quad d_1 F = p F d_1, \quad V d_1 = p d V_1.$$

Sur $H^*(W\Omega_X^i)$, F coïncide avec $p^i F$. On notera que le noyau (resp. l'image) de d_1 est stable par F (resp. V) mais non en général par V (resp. F).

Enfin, la structure d'adg de $W\Omega_X^\bullet$ induit une structure multiplicative sur la suite spectrale (3.1.1), compatible à F . L'étude de cette structure multiplicative ne sera pas abordée dans cet article.

THÉORÈME 3.2. — *La suite spectrale (3.1.1) dégénère modulo torsion en E_1 , i.e., pour tout $r \geq 1$, la différentielle $d_r \otimes K : E_r^{ij} \otimes K \rightarrow E_r^{i+r, j-r+1} \otimes K$ est nulle.*

Compte tenu de (I 5.6.1), ce théorème généralise le résultat principal de Bloch ([12], III 3.2). Pour la démonstration, on peut répéter l'argument de (*loc. cit.*) : d'après 2.13, les $H^j(W\Omega_X^i)/T^{ij}$ munis de F , sont des F -cristaux (Manin [47], Katz [40], Demazure [22]); comme F coïncide avec $p^i F$ sur $H^j(W\Omega_X^i)$ et que V est topologiquement nilpotent (2.5), les pentes (Katz, *loc. cit.*) de $H^j(W\Omega_X^i)/T^{ij}$ [ou $H^j(W\Omega_X^i) \otimes K$], i.e. les valuations des valeurs propres de F , appartient à l'intervalle $[i, i+1]$; cette propriété se conservant par passage à un sous-objet et à un quotient, il en est de même des pentes de E_r^{ij} pour tout j et tout $r \geq 1$; $E_r^{ij} \otimes K$ et $E_r^{i+r, j-r+1}$ n'ont donc pas de pente en commun, et par suite $d_r \otimes K = 0$.

COROLLAIRE 3.3. — *On a, pour tout i :*

$$H^0(W\Omega_X^i) = E_\infty^{i0} = P^i H^i(X/W).$$

En effet, comme $H^0(W\Omega_X^i)$ est sans torsion, 3.2 entraîne, par récurrence sur r , $E_1^{i0} = E_r^{i0}$ pour tout $r \geq 1$.

3.4. Rappelons que si (M, F) est un F -isocrystal sur k , i.e. un K -espace vectoriel de dimension finie muni d'un automorphisme σ -linéaire F , M admet une décomposition canonique

$$(3.4.1) \quad M = \bigotimes_{\lambda \in \mathbb{Q}} M_\lambda,$$

où M_λ est le plus grand sous- F -isocrystal de M de pente λ : si K' est le corps des fractions de $W(\bar{k})$, où $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k , on sait en effet (Manin, *loc. cit.*) que $M \otimes K'$

admet une décomposition (3.4.1), et, comme chaque $(M \otimes K')_\lambda$ possède une base formée de vecteurs e_i tels que $F e_i = p^\lambda e_i$, cette décomposition se descend à K . Pour toute partie I de $\mathbb{Q}$, on posera

$$(3.4.2) \quad M_I = \bigoplus_{\lambda \in I} M_\lambda.$$

COROLLAIRE 3.5. — Pour tout i , les flèches canoniques $H^*(W \Omega_X^{\geq i}) \rightarrow H^*(X/W)$, $H^*(X/W) \rightarrow H^*(W \Omega_X^{\leq i})$ induisent des isomorphismes

$$(3.5.1) \quad H^*(W \Omega_X^{\geq i}) \otimes K \xrightarrow{\sim} (H^*(X/W) \otimes K)_{\geq i},$$

$$(3.5.2) \quad (H^*(X/W) \otimes K)_{[0, i]} \xrightarrow{\sim} H^*(W \Omega_X^{\leq i}) \otimes K.$$

En particulier, la projection $H^*(X/W) \rightarrow H^*(W \mathcal{O}_X)$ induit un isomorphisme

$$(3.5.3) \quad (H^*(X/W) \otimes K)_{[0, 1]} \xrightarrow{\sim} H^*(W \mathcal{O}_X) \otimes K,$$

et l'on a, pour tout i , un isomorphisme canonique

$$(3.5.4) \quad H^{*-i}(W \Omega_X^i) \otimes K \xrightarrow{\sim} (H^*(X/W) \otimes K)_{[i, i+1]}.$$

Prouvons 3.5 (cf. Bloch, *loc. cit.*). D'après 3.2, la suite exacte $0 \rightarrow W \Omega_X^{\geq i} \rightarrow W \Omega_X^{\bullet} \rightarrow W \Omega_X^{\leq i-1} \rightarrow 0$ donne une suite exacte de F -isocristaux :

$$(3.5.5) \quad 0 \rightarrow H^*(W \Omega_X^{\geq i}) \otimes K \rightarrow H^*(X/W) \otimes K \rightarrow H^*(W \Omega_X^{\leq i-1}) \otimes K \rightarrow 0.$$

L'image de $H^*(W \Omega_X^{\geq i}) \otimes K$ dans $H^*(X/W) \otimes K$ étant contenue dans $(H^*(X/W) \otimes K)_{\geq i}$ grâce à (3.1.4), il suffit de vérifier que les pentes de $H^*(W \Omega_X^{\leq i-1}) \otimes K$ sont $< i$: mais cela résulte du fait que $H^*(W \Omega_X^{\leq i-1})$ est muni de l'opérateur topologiquement nilpotent V_{i-1} , qui vérifie $F V_{i-1} = V_{i-1} F = p^i$ (2.12).

Remarque 3.5.6. — Lorsque le foncteur Φ^i d'Artin-Mazur [2] est représentable par un groupe formel lisse, $H^i(W \mathcal{O}_X)$ en est le module de Cartier (i.e. le module des courbes typiques) (*loc. cit.*), et la dimension sur K de $H^i(W \mathcal{O}_X) \otimes K$ est la hauteur du plus grand quotient p -divisible de Φ^i . L'isomorphisme (3.5.3) généralise donc le résultat d'Artin-Mazur ([2], III, 3.3) [ainsi que celui de Bloch déjà cité ([12], III, 3.2)].

3.6. A cause de 3.5, on appelle *suite spectrale des pentes* la suite spectrale (3.1.1), et, parfois, *filtration par les pentes* la filtration $P^i H^*(X/W)$ (3.1.2). J'ignore si l'on peut caractériser cette filtration uniquement en termes de la structure de $H^*(X/W)$ comme W -module muni de l'endomorphisme F . Une question naturelle à cet égard est la suivante : $H^n(X/W)$ étant supposé sans torsion, est-il vrai que $P^i H^n(X/W)$ est le plus grand sous- F -cristal M tel que $F(M) \subset p^i M$? Nous verrons plus bas certains cas où la réponse est affirmative [4.10(b), 5.20].

B. *Critère de dégénérescence en E_1 .* — D'après 3.2, si les $H^j(W\Omega_X^i)$ sont sans torsion, donc de type fini sur W (2.13), la suite spectrale des pentes dégénère en E_1 . Plus généralement, on a le résultat suivant, dû à Bloch et Nygaard :

THÉORÈME 3.7. — *Si les $H^j(W\Omega_X^i)$ sont de type fini sur W , la suite spectrale des pentes dégénère en E_1 .*

Noter qu'inversement, si la suite spectrale des pentes dégénère en E_1 , les $H^j(W\Omega_X^i)$ sont de type fini sur W , puisque $H^*(X/W)$ est de type fini sur W .

Pour la démonstration de 3.7, nous aurons besoin de quelques lemmes extraits de [54].

LEMME 3.8 (Nygaard [54]). — *Soient L (resp. M) un groupe abélien muni d'un endomorphisme V (resp. F), et $d : L \rightarrow M$ un homomorphisme tel que $F d V = d$. On suppose d continu pour des topologies sur L et M compatibles avec les structures de groupes, telles que la topologie de L soit moins fine que la topologie V -adique (définie par la filtration $V^n L$) et celle de M soit séparée. Alors, si les suites croissantes :*

- (i) $\text{Ker } d \subset \text{Ker } F d \subset \dots \subset \text{Ker } F^n d \subset \dots$
- (ii) $\text{Im } d \subset \text{Im } F d \subset \dots \subset \text{Im } F^n d \subset \dots$

sont stationnaires, on a $d=0$.

Voir (loc. cit.) pour la démonstration.

LEMME 3.9 (Bloch [14]). — *Soit C un bi-complexe de groupes abéliens, de différentielles $d' : C^{ij} \rightarrow C^{i+1,j}$, $d'' : C^{ij} \rightarrow C^{i,j+1}$, $d' d'' + d'' d' = 0$. On suppose des C^{ij} munis d'endomorphismes F, V tels que les relations suivantes soient vérifiées :*

$$(3.9.1) \quad FV = VF = p, \quad F d' V = d', \quad d'' F = F d'', \quad d'' V = V d''.$$

Soit r un entier ≥ 1 . Si, dans la suite spectrale

$$E_1^{ij} = H^j(C^{i,\cdot}) \Rightarrow H^*(C),$$

on a $d_s = 0$ pour $1 \leq s \leq r$, alors on a

$$(3.9.2) \quad d_{r+1} = p^r F d_{r+1} V : H^j(C^{i,\cdot}) \rightarrow H^{j-r}(C^{i+r+1,\cdot}).$$

L'hypothèse que $d_s = 0$ pour $1 \leq s \leq r$ entraîne que d_{r+1} se calcule de la manière suivante. Soit $y \in C^{ij}$ tel que $d'' y = 0$, d'image $\bar{y}$ dans $H^j(C^{i,\cdot}) = E_1^{ij} = E_{r+1}^{ij}$. Il existe une suite d'éléments $y_s \in C^{i+s,j-s}$, $1 \leq s \leq r$, tels que $d' y = -d'' y_1, \dots, d' y_{r-1} = -d'' y_r$; on a

$$d''(d' y_r) = 0 \quad \text{et} \quad d_{r+1} \bar{y} \in E_{r+1}^{i+r+1,j-r} = H^{j-r}(C^{i+r+1,\cdot})$$

est la classe de $d' y_r (= d(y + y_1 + \dots + y_r))$. Soit maintenant $x \in C^{ij}$ tel que $d'' x = 0$, de classe $\bar{x}$ dans E_1^{ij} , et choisissons pour $y = V x$ une suite d'éléments $y_1, \dots, y_r$ comme ci-dessus. Posons $x_s = p^{s-1} F y_s$ ($1 \leq s \leq r$). On a

$$d' x = F d' V x = -F d'' y_1 = -d'' F y_1 = -d'' x_1,$$

et, pour $1 \leq s \leq r-1$:

$$d' x_s = p^s F d' y_s = -p^s F d'' y_{s+1} = -d'' x_{s+1}.$$

Par suite, $d_{r+1} \bar{x}$ est la classe de $d'x_r = p^r F d'y_r$, i.e. la classe de $p^r F d_{r+1} V \bar{x}$, ce qui prouve (3.9.2).

LEMME 3.10 (Bloch [14]). — *La suite spectrale des pentes dégénère en E_1 dès que $d_1 = 0$.*

Si U est un ouvert affine de X , on a $W\Omega_U^i = R \lim_{\leftarrow} W_n \Omega_U^i$ et $H^j(U, W_n \Omega_U^i) = 0$ pour $j > 0$, d'où $H^j(U, W\Omega_X^i) = 0$ pour $j > 0$. On peut donc calculer $H^*(W\Omega_X^*)$ comme cohomologie du complexe simple associé au complexe de Čech $C = \check{C}(U, W\Omega_X^*)$ ($C^{ij} = \check{C}^j(U, W\Omega_X^i)$) défini par un recouvrement ouvert affine U de X . Les endomorphismes F et V des $W\Omega_X^i$ définissent sur les C^{ij} des opérateurs F et V vérifiant (3.9.1), et la suite spectrale des pentes est la première suite spectrale de C . Supposons démontré $d_s = 0$ pour $1 \leq s \leq r$. On a alors (3.9.2) :

$$d_{r+1} = p^r F d_{r+1} V : E_{r+1}^{ij} = E_1^{ij} \rightarrow E_{r+1}^{i+r+1, j-r} = E_{r+1}^{i+r+1, j-r},$$

donc

$$d_{r+1}(E_1^{ij}) \subset \bigcap_{n \geq 0} p^{nr} E_1^{i+r+1, j-r} = 0,$$

puisque p est topologiquement nilpotent sur les $H^a(W\Omega_X^b)$ (2.5), d'où la conclusion, par récurrence sur r .

Démontrons 3.7. D'après 3.10, il suffit de prouver que $d_1 = 0$. Pour cela, appliquons 3.8 à $d_1 : H^j(W\Omega_X^i) \rightarrow H^j(W\Omega_X^{i+1})$. On a $F d_1 V = d_1$, et comme d_1 est W -linéaire, l'hypothèse de finitude entraîne que les chaînes (i) et (ii) de 3.8 sont stationnaires. On a donc $d_1 = 0$.

C. *Dégénérescences partielles.* — Comme Nygaard le fait observer, on peut déduire de 3.8 la dégénérescence partielle suivante ([54], 2.5, Remark) :

PROPOSITION 3.11. — *On a $E_\infty^{01} \xrightarrow{\sim} E_1^{01} = H^1(W\mathcal{O}_X)$, et une suite exacte canonique de W -modules libres de type fini*

$$(3.11.1) \quad 0 \rightarrow H^0(W\Omega_X^1) \rightarrow H^1(X/W) \rightarrow H^1(W\mathcal{O}_X) \rightarrow 0.$$

D'après 2.17 et 2.19, $H^0(W\Omega_X^1)$ et $H^1(W\mathcal{O}_X)$ sont libres de type fini sur W . Considérons

$$d_1 : H^1(W\mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(W\Omega_X^1).$$

On a, pour tout n , $\text{Im}(F^n d_1)/\text{Im}(d_1) \subset \text{Ker}(d_1 : H^1(W\Omega_X^1) \rightarrow H^1(W\Omega_X^2))/\text{Im}(d_1) = E_2^{11}$. Mais, d'après 3.3, la différentielle $d_2 : E_2^{11} \rightarrow E_2^{30}$ est nulle, donc $E_2^{11} = E_\infty^{11}$. En particulier, E_2^{11} est de type fini sur W , donc la suite $\text{Im}(F^n d_1)$ est stationnaire. Il en est de même de la suite $\text{Ker}(F^n d_1)$ puisque $H^1(W\mathcal{O}_X)$ est de type fini, donc $d_1 = 0$. Appliquant à nouveau 3.3, on obtient la première assertion. La seconde en découle, par la suite exacte des termes de bas degré.

Remarque 3.11.2. — La suite (3.11.1) est en fait une suite exacte de F -cristaux, qui se scinde naturellement : la décomposition correspond à celle du groupe p -divisible associé à $A = \text{Pic}_{X/k, \text{red}}^0$ en partie formelle [de module de Cartier $H^1(W\mathcal{O}_X)$ (cf. 2.20)] et partie étale (de module de Dieudonné covariant $H^0(W\Omega_X^1)$ [cf. (5.8.2), (5.8.3)]). On en déduit notamment

que, si f est une application canonique de X dans sa variété d'Albanese $\tilde{A}$ [28], $f^* : H^1(\tilde{A}/W) \rightarrow H^1(X/X)$ est un isomorphisme, et que, si X est une variété abélienne, $H^1(X/W)$ s'identifie canoniquement au module de Dieudonné du groupe p -divisible associé (on retrouve ainsi le résultat de Mazur-Messing [50]).

PROPOSITION 3.12. — *Supposons X purement de dimension N . Alors, pour tout i , on a $H^i(W\Omega_X^N) = E_1^{Ni} \xleftarrow{\sim} E_\infty^{Ni}$.*

Considérons d'abord $d_1 : E_1^{N-1,i} \rightarrow E_1^{Ni}$. D'après 2.18, on a $\text{Ker}(F^n d_1) = \text{Ker}(d_1)$ pour tout n , et la suite $\text{Im}(F^n d_1)$ est stationnaire. Donc, en vertu de 3.8, $d_1 = 0$. Supposons démontré que, pour $1 \leq s \leq r$, la différentielle

$$d_s : E_s^{N-s,i+s-1} \rightarrow E_s^{Ni}$$

est nulle, et considérons

$$d_{r+1} : E_{r+1}^{N-r-1,i+r} \rightarrow E_{r+1}^{Ni} = E_1^{Ni} = H^i(W\Omega_X^N).$$

L'endomorphisme V de $W\Omega_X^N$ défini par $p^{N-i-1}V$ en degré $i \leq N-1$ et F^{-1} en degré N (2.8) induit un endomorphisme, noté encore V , de la suite spectrale des pentes. En particulier, on a $V d_{r+1} = d_{r+1} V$, d'où, en composant avec $F : H^i(W\Omega_X^N) \rightarrow H^i(W\Omega_X^N)$:

$$d_{r+1} = F d_{r+1} V : E_{r+1}^{N-r-1,i+r} \rightarrow E_{r+1}^{Ni} = H^i(W\Omega_X^N).$$

D'après 2.18, on a $\text{Ker}(F^n d_{r+1}) = \text{Ker}(d_{r+1})$ pour tout n , et la suite $\text{Im}(F^n d_{r+1})$ est stationnaire, donc, par 3.8, $d_{r+1} = 0$, d'où la conclusion.

COROLLAIRE 3.13. — *Si X est de dimension $\leq N$, la suite spectrale des pentes dégénère en E_N .*

On peut en effet supposer X purement de dimension N . Les seules différentielles d_N éventuellement non nulles seraient

$$d_N : E_N^{0,N-1} \rightarrow E_N^{N,0} \quad \text{et} \quad d_N : E_N^{0,N} \rightarrow E_N^{N,1}.$$

Mais la première est nulle par 3.3, et la seconde par 3.12.

COROLLAIRE 3.14 (cf. Nygaard [55]). — *Si X est une surface, la seule différentielle éventuellement non nulle de la suite spectrale des pentes est $d_1 : H^2(W\mathcal{O}_X) \rightarrow H^2(W\Omega_X^1)$. Pour $(j, i) \neq (2, 0), (2, 1)$, $H^j(W\Omega_X^i)$ est de type fini sur W . On a*

$$(3.14.1) \quad \begin{cases} H^0(W\Omega_X^2) \xrightarrow{\sim} P^2 H^2(X/W), \\ H^2(W\Omega_X^{\geq 1}) \xrightarrow{\sim} P^1 H^2(X/W), \end{cases}$$

et une suite exacte canonique

$$(3.14.2) \quad 0 \rightarrow H^0(W\Omega_X^2) \rightarrow H^2(W\Omega_X^{\geq 1}) \rightarrow H^1(W\Omega_X^1) \rightarrow 0.$$

Si $H^2(W\mathcal{O}_X)$ est de type fini sur W la suite spectrale des pentes dégénère en E_1 .

C'est une conséquence immédiate de 3.3, 3.11, 3.12.

COROLLAIRE 3.15. — Si X est purement de dimension N , on a

$$H^N(W\Omega_X^N) \xrightarrow{\sim} E_2^{N,N} = H^{2N}(X/W).$$

C'est un cas particulier de 3.12. Rappelons que, par la théorie de la trace (Berthelot [4], VII 2.1.1), $H^{2N}(X/W)$ est libre sur W , de rang c , où c est le nombre de composantes connexes géométriques de X . Il serait agréable d'avoir une démonstration directe de ce résultat à l'aide de 3.15, en construisant un homomorphisme « résidu en un point fermé » $H_x^N(W\Omega_X^N) \rightarrow W$. Le théorème de dualité de Poincaré de Berthelot (*loc. cit.*) en résulterait formellement grâce à 2.7.

4. POLYGONES DE NEWTON, CONJECTURE DE KATZ. — On conserve les hypothèses et notations du n° 3.

4.1. Rappelons (I 3.5, 3.19) qu'on a, pour tout i , un diagramme commutatif de pro-objets, à lignes et colonnes exactes

$$(4.1.1) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & 0 & & \\ & & & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & W\Omega_X^{i-1} & \xrightarrow{F} & W\Omega_X^{i-1} & \rightarrow & W\Omega_X^{i-1}/F \rightarrow 0 \\ & & \downarrow Fd & & \downarrow dV & & \downarrow dV \\ 0 & \rightarrow & W\Omega_X^i & \xrightarrow{v} & W\Omega_X^i & \rightarrow & W\Omega_X^i/V \rightarrow 0 \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \Omega_X^i \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & 0 \end{array}$$

qui, d'après 2.1, 2.2, donne naissance à un diagramme de suites exactes longues

$$(4.1.2) \quad \begin{array}{ccccccc} & & & & \vdots & & \\ & & & & \downarrow & & \\ \dots & \rightarrow & H^j(W\Omega_X^{i-1}) & \rightarrow & H^j(W\Omega_X^{i-1}/F) & \rightarrow & H^{j+1}(W\Omega_X^{i-1}) \xrightarrow{F} \dots \\ & & \downarrow dV & & \downarrow dV & & \downarrow \\ \dots & \rightarrow & H^j(W\Omega_X^i) & \rightarrow & H^j(W\Omega_X^i/V) & \rightarrow & H^{j+1}(W\Omega_X^i) \xrightarrow{v} \dots \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & H^j(\Omega_X^i) & & \\ & & & & \downarrow & & \\ & & & & \vdots & & \end{array}$$

On en déduit notamment :

PROPOSITION 4.2. — Soient $i, j \in \mathbb{Z}$. Si l'application $dV : H^j(W\Omega_X^{i-1}) \rightarrow H^j(W\Omega_X^i)$ est nulle, et si $H^{j+1}(W\Omega_X^{i-1})$ est sans F -torsion (i. e. si l'endomorphisme F de $H^{j+1}(W\Omega_X^{i-1})$ est injectif), alors la flèche $H^j(W\Omega_X^i/V) \rightarrow H^j(\Omega_X^i)$ [resp. $H^{j-1}(W\Omega_X^i/V) \rightarrow H^{j-1}(\Omega_X^i)$] de la suite verticale de (4.1.2) est injective (resp. surjective).

On notera que la première hypothèse est vérifiée, d'après 3.2, si $H^j(W\Omega_X^i)$ est sans p -torsion. Rappelons [2.15 (a)] que dans ce cas $H^j(W\Omega_X^i)$ est le module de Cartier d'un groupe formel p -divisible G_X^{ij} . L'espace tangent à l'origine à G_X^{ij} s'identifie canoniquement à $H^j(W\Omega_X^i)/V$. Comme $H^j(W\Omega_X^i)/V = \text{Im } H^j(W\Omega_X^i) \rightarrow H^j(W\Omega_X^i/V)$, 4.2 entraîne :

COROLLAIRE 4.3. — Si $H^j(W\Omega_X^i)$ est sans p -torsion et si $H^{j+1}(W\Omega_X^{i-1})$ est sans F -torsion, on a $\dim(G_X^{ij}) \leq h^{ij}$, où $h^{ij} = \dim H^j(\Omega_X^i)$.

4.4. Rappelons d'autre part que, si M est le module de Cartier d'un groupe formel p -divisible G , M/F s'identifie canoniquement à l'espace cotangent à l'origine au groupe dual G^* , de sorte que la suite exacte

$$(4.4.1) \quad 0 \rightarrow M/V \xrightarrow{F} M/p \rightarrow M/F \rightarrow 0$$

donne

$$(4.4.2) \quad \dim(G) + \dim(G^*) = ht(G),$$

où $ht(G) = \dim(M/p) = rg(M)$ est la hauteur de G (cf. [17], [24]). De 4.2 et du diagramme (4.1.2) on déduit donc :

COROLLAIRE 4.5. — Si $H^j(W\Omega_X^i)$ et $H^{j+1}(W\Omega_X^i)$ sont sans p -torsion, $H^{j+1}(W\Omega_X^{i-1})$ et $H^{j+2}(W\Omega_X^{i-1})$ sans F -torsion, la suite verticale de (4.1.2) fournit une suite exacte

$$(4.5.1) \quad 0 \rightarrow H^j(W\Omega_X^i)/V \rightarrow H^j(\Omega_X^i) \rightarrow H^{j+1}(W\Omega_X^{i-1})/F \rightarrow 0,$$

d'où, si de plus $H^{j+1}(W\Omega_X^{i-1})$ est sans p -torsion :

$$(4.5.2) \quad \dim(G_X^{ij}) + \dim(G_X^{i-1, j+1})^* = h^{ij},$$

où $h^{ij} = \dim H^j(\Omega_X^i)$.

COROLLAIRE 4.6 ⁽³⁾. — Soit $n \in \mathbb{Z}$. On suppose que, quels que soient i, j tels que $i+j=n$ ou $n+1$, $H^j(W\Omega_X^i)$ est sans p -torsion. Alors $H^0(W\Omega_X^n)/F=0$, et l'on a une suite exacte canonique

$$(4.6.1) \quad \begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(W\Omega_X^n)/V \rightarrow H^0(\Omega_X^n) \rightarrow H^1(W\Omega_X^{n-1})/p \rightarrow H^1(\Omega_X^{n-1}) \\ \rightarrow H^2(W\Omega_X^{n-2})/p \rightarrow \dots \rightarrow H^i(W\Omega_X^{n-i})/p \rightarrow H^i(\Omega_X^{n-i}) \rightarrow H^{i+1}(W\Omega_X^{n-i-1})/p \\ \rightarrow \dots \rightarrow H^{n-1}(\Omega_X^1) \rightarrow H^n(W\mathcal{O}_X)/p \rightarrow H^n(\mathcal{O}_X) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

⁽³⁾ Un résultat analogue pour C_X (I 5.1.6) a été obtenu indépendamment par Bloch (non publié).

où

$$\operatorname{Im} H^i(W\Omega_X^{n-i})/p \rightarrow H^i(\Omega_X^{n-i}) = H^i(W\Omega_X^{n-i})/V$$

et

$$\operatorname{Im} H^i(\Omega_X^{n-i}) \rightarrow H^{i+1}(W\Omega_X^{n-i-1})/p = H^{i+1}(W\Omega_X^{n-i-1})/F.$$

La première assertion découle de (4.5.1) pour $j = -1$, $i = n+1$. La suite exacte (4.6.1) s'obtient en raccordant les suites (4.5.1) (pour $i+j=n$) aux suites exactes

$$(4.6.2) \quad 0 \rightarrow H^i(W\Omega_X^{n-i})/F \xrightarrow{V} H^i(W\Omega_X^{n-i})/p \rightarrow H^i(W\Omega_X^{n-i})/V \rightarrow 0.$$

La conséquence suivante de 4.6 a été dégagée par Bloch [15] :

COROLLAIRE 4.7. — Soit n un entier tel que les hypothèses de 4.6 soient satisfaites. Posons, pour $0 \leq i \leq n$:

$$\begin{aligned} h^i &= h^{i, n-i} = \dim H^{n-i}(\Omega_X^i), \\ a_i &= \dim G_X^{i, n-i} = \dim H^{n-i}(W\Omega_X^i)/V, \\ a'_i &= \dim (G_X^{i, n-i})^* = \dim H^{n-i}(W\Omega_X^i)/F. \end{aligned}$$

Notons H le F -cristal $\bigoplus_{0 \leq i \leq n} H^{n-i}(W\Omega_X^i)$ muni de l'action de F (donnée par $p^i F$ sur $W\Omega_X^i$).

Alors :

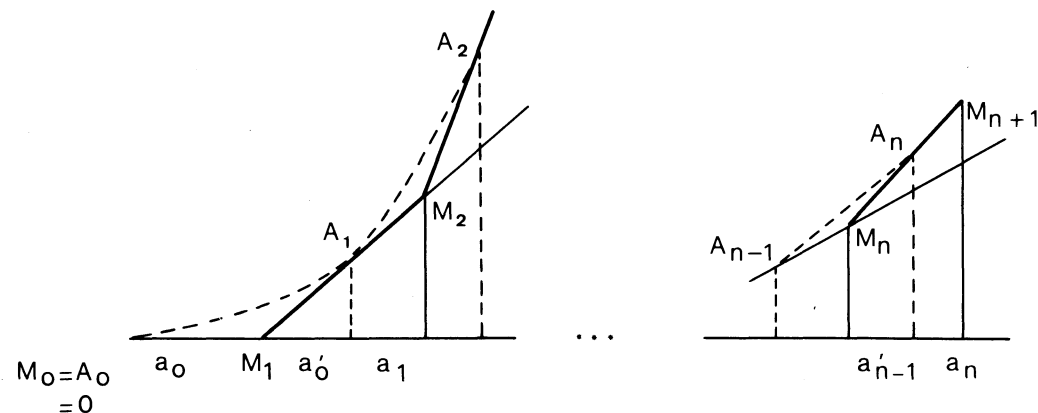
(a) $h^0 = a_0$, $h^i = a'_{i-1} + a_i$ ($1 \leq i \leq n$), $a'_n = 0$.

(b) Soient M_i les points de $\mathbb{R}^2$ définis par

$$M_0 = 0, \quad M_{r+1} = \left(\sum_{i \leq r} h^i, \sum_{i \leq r} i h^i \right) \quad (0 \leq r \leq n).$$

Le polygone de Hodge de H , au sens de Mazur [49], est $M_0 M_1 \dots M_{n+1}$, en d'autres termes les nombres de Hodge de H sont $(h^0, h^1, \dots, h^n)$.

(c) Le polygone de Newton de H passe par les points A_i définis par $A_0 = M_0 = 0$, $A_{i+1} = M_{i+1} + (a'_i, (i+1)a'_i) \in M_{i+1} M_{i+2}$ ($0 \leq i \leq n$), et ses pentes entre A_i et A_{i+1} appartiennent à l'intervalle $[i, i+1[$; il est situé au-dessus du polygone de Hodge de H , son point le plus à droite est $A_{n+1} = M_{n+1}$ (voir les figures ci-après).



Les relations (a) résultent aussitôt de 4.6. On sait d'autre part (Mazur, *loc. cit.*, Ogus [11], 8.40) que le polygone de Newton de tout F-cristal est au-dessus du polygone de Hodge et que les deux polygones ont même extrémité. Pour établir (b) et (c) il suffit donc, compte tenu de (a), de prouver que, pour $0 \leq i \leq n$, les nombres de Hodge de $H^{n-i}(W\Omega_X^i)(i)$ sont (a_i, a'_i) , où $H^{n-i}(W\Omega_X^i)(i)$ désigne $H^{n-i}(W\Omega_X^i)$ muni de l'action de $p^{-i}F = F$. Cela résulte du lemme suivant :

LEMME 4.8. — Soit M un F-cristal sur W possédant un endomorphisme σ^{-1} -linéaire V tel que $VF = FV = p$. Alors les nombres de Hodge de M sont $(\dim(M/V), \dim(M/F))$.

Comme on a $pM \subset FM$, les nombres de Hodge de M sont (h^0, h^1) . Par définition,

$$h^0 = \dim F(M/p) = \dim(FM/pM) = \dim(M/V),$$

donc

$$h^1 = \dim(M/p) - \dim(M/V) = \dim(M/F).$$

COROLLAIRE 4.9. — Supposons que, quels que soient i et j , $H^j(W\Omega_X^i)$ soit sans p -torsion. Alors :

(a) La suite spectrale des pentes dégénère en E_1 , $H^*(X/W)$ est sans p -torsion, et l'on a, pour tout n :

$$rg H^n(X/W) = \sum_{i+j=n} ht(G_X^{ij}) (= \sum_{i+j=n} rg H^j(W\Omega_X^i)).$$

(b) La suite spectrale de Hodge de X/k :

$$E_1^{ij} = H^j(\Omega_X^i) \Rightarrow H_{DR}^*(X/k),$$

dégénère en E_1 , et l'on a, pour tout n :

$$rg H^n(X/W) = \dim H_{DR}^n(X/k) = \sum_{i+j=n} h^{ij},$$

où $h^{ij} = \dim H^j(\Omega_X^i)$.

(c) Pour tout n , le polygone de Newton $Nwt_n(X/W)$ de $H^n(X/W)$ est au-dessus du polygone de Hodge $Hdg_n(X/k)$ défini par les nombres $(h^0, \dots, h^n)$, où $h^i = h^{i, n-i}$. De plus, si $M_0 = 0$, $M_{r+1} = (\sum_{i \leq r} h^i, \sum_{i \leq r} ih^i)$ ($0 \leq r \leq n$) désignent les sommets de $Hdg_n(X/k)$, $Nwt_n(X/W)$ passe par les points $A_0, \dots, A_{n+1} = M_{n+1}$ de $Hdg_n(X/k)$ définis en 4.7 (c), et ses pentes entre A_i et A_{i+1} appartiennent à l'intervalle $[i, i+1[$.

L'assertion (a) découle immédiatement de 3.2. Comme $H^*(X/W)$ est sans torsion, la suite exacte des coefficients universels

$$(4.9.1) \quad 0 \rightarrow H^n(X/W) \otimes k \rightarrow H_{DR}^n(X/k) \rightarrow \text{Tor}_1^W(H^{n+1}(X/W), k) \rightarrow 0,$$

conséquence de (2.7.1), (2.8.2) (cf. Berthelot [4], VII 1.1.11), entraîne

$$(\star) \quad rg H^n(X/W) = \dim H_{DR}^n(X/k),$$

pour tout n . D'autre part, la suite exacte (4.6.1) entraîne, pour tout n :

$$\sum_{i+j=n} h^{ij} = \sum_{i+j=n} \dim H^j(W\Omega_X^i)/p = \dim H_{DR}^n(X/k),$$

d'après (a) et (★), d'où (b). Enfin, comme $H^n(X/W)$ a même polygone de Newton que le cristal H défini en 4.7, l'assertion (c) résulte de 4.7 (c).

Remarques 4.10. — (a) Le résultat ci-dessus résout affirmativement la « conjecture de Katz » (Mazur [49], Ogus [11]). Les hypothèses de 4.9 sont plus fortes que celles du théorème d'Ogus (*loc. cit.*, 8.26, 8.36), mais donnent la conclusion plus précise que $\text{Nwt}_n(X/W)$ touche $\text{Hdg}_n(X/k)$ aux points A_i ; bien entendu, cette conclusion serait fautive en général sous les hypothèses d'Ogus (*loc. cit.*). Cependant, dans la situation de 4.9, et plus généralement sous les seules hypothèses que $H^*(X/W)$ est sans torsion et que la suite spectrale de Hodge 4.9 (b) dégénère en E_1 , le théorème d'Ogus (*loc. cit.*, 8.26), généralisant celui de Mazur (*loc. cit.*), détermine la filtration de Hodge et la filtration conjuguée de $H_{\text{DR}}^n(X/k)$ uniquement en termes de la structure de F-cristal de $H^n(X/W)$. Il serait intéressant d'avoir une démonstration directe de ce fait à l'aide du complexe de DR-Witt. Le résultat d'Ogus entraîne notamment que, dans la situation de 4.9, $\text{Hdg}_n(X/k)$ est le polygone de Hodge (au sens abstrait) du F-cristal $H^n(X/W)$. Comme $\text{Nwt}_n(X/W)$ change de pentes aux points A_i de $\text{Hdg}_n(X/k)$, il découle d'un résultat récent de Katz [42] que $H^n(X/W)$ est isomorphe au F-cristal H de 4.7, i. e. se décompose en

$$(4.10.1) \quad H^n(X/W) = \bigoplus_{0 \leq i \leq n} H^{n-i}(W\Omega_X^i),$$

l'action de F sur $H^{n-1}(W\Omega_X^i)$ étant donnée par $p^i F$ sur $W\Omega_X^i$. Cette décomposition correspond à un scindage de la filtration par les pentes

$$(4.10.2) \quad P^i H^n(X/W) = \bigoplus_{i \leq j \leq n} H^{n-j}(W\Omega_X^j),$$

scindage d'ailleurs unique puisque, pour $i \neq j$, $H^{n-i}(W\Omega_X^i)$ et $H^{n-j}(W\Omega_X^j)$ n'ont pas de pente en commun. Il résulte en particulier de (4.10.2) que $P^i H^n(X/W)$ est le plus grand sous-F-cristal M de $H^n(X/W)$ tel que $F(M) \subset p^i M$, ce qui, dans ce cas, résout affirmativement la question de 3.6.

(b) Soit n un entier tel que les hypothèses de 4.6 soient vérifiées. Il résulte de 3.2 que, pour $i+j=n$ ou $n+1$, les différentielles d_r de la suite spectrale des pentes aboutissant à E_r^{ij} sont nulles, donc que E_∞^{ij} s'injecte dans E_1^{ij} et est sans p -torsion. Donc $H^n(X/W)$ et $H^{n+1}(X/W)$ sont sans torsion. La démonstration de 4.9 montre que $\text{rg } H^n(X/W) = \dim H_{\text{DR}}^n(X/k) = \sum_{i+j=n} h^{ij}$, et les assertions de 4.9 (c), pour l'entier n donné, sont valables.

Signalons également, comme conséquence de 3.2, le curieux résultat suivant :

PROPOSITION 4.11. — *Supposons que X se relève en un schéma Y projectif et lisse sur W , et que l'endomorphisme de Frobenius de X se relève en un morphisme $F : Y \rightarrow Y^{(\sigma)} = Y \times_W (W, \sigma)$. Alors, pour tout n , le polygone de Newton de $(H^n(X/W) \otimes K, F)$ coïncide avec le polygone de Hodge défini par les nombres $h^{i, n-i} = \text{rg } H^{n-i}(\Omega_Y^i)$ ($0 \leq i \leq n$).*

Soit $\hat{Y}$ le complété formel de Y le long de X , posons $\Omega_{\hat{Y}}^\bullet = (\Omega_Y^\bullet)^\wedge = \varprojlim \Omega_Y^\bullet$, où $Y_r = Y \times_W W_r$. La donnée de F définit, d'après 1.1, 1.4, un système projectif de quasi-isomorphismes

$$(1) \quad \Omega_{\hat{Y}}^\bullet \rightarrow W_r \Omega_X^\bullet,$$

et, d'après 2.1, la limite projective

$$(2) \quad \Omega_Y^\bullet \rightarrow W\Omega_X^\bullet,$$

des flèches (1) induit un isomorphisme

$$(3) \quad R\Gamma(\Omega_Y^\bullet) \rightarrow R\Gamma(W\Omega_X^\bullet).$$

Fixons $n \in \mathbb{N}$, notons Nwt_n le polygone de Newton de $(H^n(X/W), F)$, Hdg_n le polygone de Hodge défini par les nombres $h^{i, n-i}$. Pour tout i , on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} H^n(\Omega_Y^\bullet) \otimes K & \xrightarrow{a'} & H^n(\Omega_Y^\bullet) \otimes K & \xrightarrow{a} & H^n(W\Omega_X^\bullet) \otimes K \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow c \\ H^n(\Omega_Y^{\leq i}) \otimes K & \xrightarrow{b'} & H^n(\Omega_Y^{\leq i}) \otimes K & \xrightarrow{b} & H^n(W\Omega_X^{\leq i}) \otimes K \end{array}$$

où les flèches verticales sont données par les projections $\Omega_Y^\bullet \rightarrow \Omega_Y^{\leq i}$, $\Omega_Y^\bullet \rightarrow \Omega_Y^{\leq i}$, $W\Omega_X^\bullet \rightarrow W\Omega_X^{\leq i}$ (2.9.1), a et b par (2), et a' et b' sont les flèches canoniques, des isomorphismes par le théorème de comparaison de Grothendieck (EGA III 4.1.5). La flèche a , induite par (3), est un isomorphisme, et, d'après 3.2, la flèche c est surjective. Donc b est surjective, donc

$$(4) \quad \dim H^n(W\Omega_X^{\leq i}) \otimes K \leq \dim H^n(\Omega_Y^{\leq i}) \otimes K = \dim H^n(\Omega_Y^{\leq i}) \otimes K.$$

Notons $s_{<i}(\text{Nwt}_n)$ [resp. $s_{<i}(\text{Hdg}_n)$] la longueur de la projection horizontale de la partie de Nwt_n (resp. Hdg_n) de pente $< i$. D'après 3.5, on a

$$s_{<i}(\text{Nwt}_n) = \dim H^n(W\Omega_X^{\leq i}) \otimes K.$$

D'autre part, d'après Deligne [20], 5.5, on a

$$\dim H^n(\Omega_Y^{\leq i}) \otimes K = \sum_{0 \leq j \leq i} h^{j, n-j} = s_{<i}(\text{Hdg}_n),$$

donc (4) entraîne

$$(5) \quad s_{<i}(\text{Nwt}_n) \leq s_{<i}(\text{Hdg}_n).$$

Soit f (resp. g) la fonction linéaire par morceaux dont le graphe est Hdg_n (resp. Nwt_n). Soient x un point tel que $f'(x)$ et $g'(x)$ soient définis, et i l'entier tel que $i-1 \leq g'(x) < i$. (5) entraîne $f'(x) < i$ donc

$$(6) \quad f'(x) \leq g'(x).$$

Posons $b_n = rg H^n(X/W) = rg H^n(\Omega_Y^\bullet) = \sum_{0 \leq i \leq n} h^{i, n-i}$. Par la symétrie de Hodge (Deligne, *loc. cit.*), on a $f(b_n) = nb_n/2$. D'autre part, par le théorème de Lefschetz fort ([5], [43], [33]), $g(b_n) = nb_n/2$. Par suite, (6) entraîne $f(x) = g(x)$ pour tout x , ce qui achève la démonstration.

Remarque 4.12. — Comme Ogus le fait observer, si, dans la situation de 4.11, on fait en outre l'hypothèse que les $H^j(\Omega_Y^i)$ sont sans torsion, alors la conclusion découle d'un calcul élémentaire d'algèbre linéaire sur le F-cristal $(H^n(X/W), F)$, en utilisant le relèvement de la filtration de Hodge donné par les $H^n(\Omega_Y^{\geq i})$.

5. COMPARAISON AVEC LA COHOMOLOGIE ÉTALE ET LA COHOMOLOGIE PLATE. — On conserve les hypothèses et notations du n° 3. On suppose de plus le corps k algébriquement clos.

A. Suites exactes fondamentales.

5.1. Soit $X_{\text{ét}}$ (resp. X_{fppf}) le site étale (resp. $fppf$) de X . Comme les $W_n \Omega_X^i$ sont des faisceaux quasi-cohérents sur le schéma $W_n(X)$ (I 1.13), la production canonique $X_{\text{ét}} \rightarrow X_{\text{zar}}$ (où X_{zar} est le site zariskien) induit des isomorphismes

$$(5.1.1) \quad H^*(W_n \Omega_X^i) \xrightarrow{\sim} H^*(X_{\text{ét}}, W_n \Omega_X^i),$$

où $W_n \Omega_X^i$ désigne l'extension naturelle de $W_n \Omega_X^i$ à $X_{\text{ét}}$, qui s'identifie d'ailleurs (I 1.14) au faisceau $U \mapsto W_n \Omega_U^i$ sur $X_{\text{ét}}$. D'autre part, si $\varepsilon : X_{fppf} \rightarrow X_{\text{ét}}$ est la projection canonique, on sait (Grothendieck [29], III, 11.7) que l'on a $\mathbb{G}_m \xrightarrow{\sim} R\varepsilon_* \mathbb{G}_m$, d'où, par la suite exacte de faisceaux $fppf$:

$$(5.1.2) \quad 0 \rightarrow \mu_{p^n} \rightarrow \mathcal{O}_X^* \xrightarrow{p^n} \mathcal{O}_X^* \rightarrow 0,$$

un isomorphisme canonique

$$(5.1.3) \quad R\varepsilon_* \mu_{p^n} \rightarrow (\mathcal{O}_X^* / \mathcal{O}_X^{*p^n})[-1],$$

induisant

$$(5.1.4) \quad H^*(X_{fppf}, \mu_{p^n}) \xrightarrow{\sim} H^{*-1}(X_{\text{ét}}, \mathcal{O}_X^* / \mathcal{O}_X^{*p^n}).$$

(Les isomorphismes et suites exactes précédents sont bien entendu valables sans l'hypothèse que k est algébriquement clos).

Dans la suite, nous omettrons les indices $fppf$ ou ét quand il n'en pourra résulter de confusion, et nous poserons

$$(5.1.5) \quad H^*(X, \mathbb{Z}_p) = \varprojlim H^*(X_{\text{ét}}, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z}),$$

$$(5.1.6) \quad H^*(X, \mathbb{Z}_p(1)) = \varprojlim H^*(X, \mu_{p^n}) = \varprojlim H^{*-1}(X, \mathcal{O}_X^* / \mathcal{O}_X^{*p^n}),$$

$$(5.1.7) \quad H^*(X, \mathbb{Q}_p) = H^*(X, \mathbb{Z}_p) \otimes \mathbb{Q}_p, \quad H^*(X, \mathbb{Q}_p(1)) = H^*(X, \mathbb{Z}_p(1)) \otimes \mathbb{Q}_p.$$

THÉORÈME 5.2. — Les suites exactes (3.28.1), (3.29.1) définissent des suites exactes

$$(5.2.1) \quad \dots \rightarrow H^i(X, \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^i(W \mathcal{O}_X) \xrightarrow{1-F} H^i(W \mathcal{O}_X) \rightarrow \dots,$$

$$(5.2.2) \quad 0 \rightarrow H^*(X, \mathbb{Z}_p) \rightarrow H^*(X/W) \xrightarrow{1-F} H^*(X/W) \rightarrow 0.$$

Le système projectif $H^*(X, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})$ vérifie (ML), les $H^i(X, \mathbb{Z}/p^n \mathbb{Z})$ étant des groupes finis (SGA 4 XIV 1.2). De même, comme on l'a déjà vu, le système projectif $H^*(W_n \mathcal{O}_X)$ [resp. $H^*(X/W_n) = H^*(W_n \Omega_X^1)$] vérifie (ML), les $H^i(W_n \mathcal{O}_X)$ [resp. $H^i(X/W_n)$] étant de longueur finie sur W . La limite projective des suites exactes de cohomologie (étale) définies par (3.28.1) [resp. (3.29.1)] est donc exacte. Compte tenu de (5.1.2) et (2.1.2) on obtient ainsi (5.2.1), et la suite longue relative à $H^*(X/W)$ se scinde en les suites (5.2.2) à cause du lemme suivant :

LEMME 5.3. — *Soit F un endomorphisme σ -linéaire d'un W -module de type fini M . Alors $1 - F : M \rightarrow M$ est surjectif.*

Ce résultat est bien connu. Nous en rappelons une démonstration, faute de référence adéquate. Par dévissage, il suffit de traiter les cas : (i) M est de torsion, (ii) M est libre. Le cas (i) est traité dans Serre ([66], § 18, lemme 6) : par dévissage, on se ramène à M annulé par p , et F bijectif, auquel cas M admet une k -base formée de points fixes de F , d'où la conclusion. Dans le cas (ii), soit U le sous- F -cristal unité de M (Katz [40], 2.1). Sur M/U , F est topologiquement nilpotent, donc $1 - F$ est surjectif. D'autre part, U possède une W -base formée de points fixes de F , donc on est ramené à $U = W$. Comme $1 - F$ est surjectif sur k , $1 - F$ est surjectif sur chaque W_n [cas très particulier de (I 3.26)!], donc sur W , le système projectif des noyaux $\mathbb{Z}/p^n$ étant strict. Le lemme est donc établi.

5.4. La suite (5.2.2) montre notamment que : (a) la partie de pente 0 de $H^*(X/W) \otimes_w K$ s'identifie canoniquement à $H^*(X, \mathbb{Q}_p) \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$; (b) si $H^*(X/W)$ est sans torsion, il en est de même de $H^*(X, \mathbb{Z}_p)$, et le sous-cristal unité ([40], 2.1) de $H^*(X/W)$ s'identifie canoniquement à $H^*(X, \mathbb{Z}_p) \otimes_{\mathbb{Z}_p} W$ [$H^*(X, \mathbb{Z}_p)$ est une « base » de points fixes]. Ces énoncés ne sont, semble-t-il, pas nouveaux, mais il est difficile d'indiquer une référence. Voir cependant l'article d'Ogus [58], où $H^*(X, W)$ est relié à la cohomologie cristalline par le truchement du site infinitésimal.

THÉORÈME 5.5. — *Les suites exactes (3.27.1), (3.29.2) fournissent des suites exactes*

$$(5.5.1) \quad \dots \rightarrow H^{i+1}(X, \mathbb{Z}_p(1)) \rightarrow H^i(W \Omega_X^1) \xrightarrow{1-F} H^i(W \Omega_X^1) \rightarrow \dots,$$

$$(5.5.2) \quad \dots \rightarrow H^i(X, \mathbb{Z}_p(1)) \rightarrow H^i(W \Omega_X^{\geq 1}) \xrightarrow{1-F'} H^i(W \Omega_X^{\geq 1}) \rightarrow \dots,$$

$$(5.5.3) \quad 0 \rightarrow H^*(X, \mathbb{Q}_p(1)) \rightarrow H^*(X/W) \otimes K \xrightarrow{p-F} H^*(X/W) \otimes K \rightarrow 0.$$

D'après Milne [51] (ou Berthelot [9]), $H^i(X, \mu_{p^n})$ est l'ensemble des k -points d'un k -groupe parfait $H^i(X, \mu_{p^n})$. La catégorie des groupes quasi-algébriques étant artinienne (Serre [67], 1.3), le système projectif $H^*(X, \mu_{p^n})$ vérifie donc (ML). Par ailleurs, on a déjà vu que les systèmes projectifs $H^*(W_n \Omega_X^1)$, $H^*(W_n \Omega_X^{\geq 1})$ vérifient (ML). Compte tenu de (5.1.1) et (5.1.4), il en résulte que, par passage à la limite, les suites exactes longues déduites de (3.27.1) et (3.29.2) restent exactes, d'où les suites (5.5.1) et (5.5.2). D'après 2.13, si T est la p -torsion de $H^*(W \Omega_X^1)$, $H^*(W \Omega_X^1)/T$ est de type fini sur W , donc, en vertu de 5.3,

l'endomorphisme $1 - F$ de $H^*(W\Omega_X^1)/T$ est surjectif. La suite déduite de (5.5.1) par application de $\otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p$ se scinde donc en la suite exacte

$$(5.5.4) \quad 0 \rightarrow H^{*+1}(X, \mathbb{Q}_p(1)) \rightarrow H^*(W\Omega_X^1) \otimes K \xrightarrow{1-F} H^*(W\Omega_X^1) \otimes K \rightarrow 0.$$

D'après (3.5.4), $H^*(W\Omega_X^1) \otimes K$ s'identifie à $(H^{*+1}(X/W) \otimes K)_{[1,2]}$ et pF à F , le noyau de $p - F$ sur $H^*(X/W) \otimes K$ s'identifie donc au noyau de $p - F$ sur $H^{*-1}(W\Omega_X^1) \otimes K$. La suite (5.5.3) découle donc de (5.5.4) et de la variante suivante de 5.3 :

LEMME 5.6. — Si F est un σ -automorphisme d'un K -espace vectoriel de dimension finie M [où K est le corps des fractions de $W = W(k)$], alors $1 - F : M \rightarrow M$ est surjectif.

Avec les notations de 3.4, on a $M = M_{<0} \oplus M_{\geq 0}$. La surjectivité de $1 - F$ sur $M_{\geq 0}$ résulte de 5.3 (car il existe un F -cristal E tel que $E \otimes K \xrightarrow{\sim} M_{\geq 0}$), et celle de $1 - F$ sur $M_{<0}$ équivaut à celle de $1 - F^{-1}$, qui se ramène au cas précédent (avec σ remplacé par σ^{-1} , mais 5.3 est encore valable si l'on remplace σ par σ^n , $n \in \mathbb{Z}$).

Les suites exactes de 5.5 généralisent (et raffinent) celles de Bloch ([12], III 4.1). On notera que, par (5.5.3), la partie de pente 1 de $H^*(X/W) \otimes K$ (3.4) s'identifie canoniquement à $H^*(X, \mathbb{Q}_p(1)) \otimes_{\mathbb{Q}_p} K$.

B. Inégalité d'Igusa-Artin-Mazur.

5.7. Nous allons dégager quelques conséquences de 5.5 relativement à $H^i(X, \mathbb{Z}_p(1))$ pour les petites valeurs de i . Rappelons auparavant quelques faits généraux concernant les $H^i(X, \mu_{p^n})$.

Le groupe parfait quasi-algébrique $H^i(X, \mu_{p^n})$ ([9], [51]), dont l'ensemble des k -points est $H^i(X, \mu_{p^n})$, est extension d'un groupe fini étale $D^i(X, \mu_{p^n})$ par un groupe lisse unipotent connexe $U^i(X, \mu_{p^n})$:

$$(5.7.1) \quad 0 \rightarrow U^i(X, \mu_{p^n}) \rightarrow H^i(X, \mu_{p^n}) \rightarrow D^i(X, \mu_{p^n}) \rightarrow 0.$$

La théorie de Kummer (5.1.2) montre que

$$(5.7.2) \quad H^0(X, \mu_{p^n}) = 0,$$

$$(5.7.3) \quad U^1(X, \mu_{p^n}) = 0, \quad H^1(X, \mu_{p^n}) = D^1(X, \mu_{p^n}) = {}_{p^n}\text{Pic}(X),$$

où, pour un groupe abélien A , ${}_p A = \text{Ker } p : A \rightarrow A$. Elle fournit des suites exactes

$$(5.7.4) \quad 0 \rightarrow H^{i-1}(X, \mathbb{G}_m)/p^n \rightarrow H^i(X, \mu_{p^n}) \rightarrow {}_p H^i(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow 0$$

[en cohomologie plate, mais noter que, d'après Grothendieck ([29], III 11.7), $H^*(X_{\text{ét}}, \mathbb{G}_m) = H^*(X_{fppf}, \mathbb{G}_m)$]. Si A est un groupe abélien, nous poserons

$$(5.7.5) \quad T_p(A) = \varprojlim_p {}_p A$$

(« module de Tate » de A). La multiplication par p dans le pro-objet « $\varprojlim_p p^n A$ » étant injective, $T_p(A)$ est sans p -torsion. D'autre part, $T_p(A) = T_p(A_{\text{div}})$, où A_{div} est le sous-groupe de A formé des éléments infiniment p -divisibles, et le système projectif des $p^n A_{\text{div}}$ s'identifie au système projectif des $T_p(A)/p^n$ (où les flèches sont les projections canoniques), en particulier $T_p(A)$ est p -adiquement séparé et complet. Par passage à la limite, (5.7.4) fournit une suite exacte

$$(5.7.6) \quad 0 \rightarrow \varprojlim H^{i-1}(X, G_m)/p^n \rightarrow H^i(X, \mathbb{Z}_p(1)) \rightarrow T_p H^i(X, G_m) \rightarrow 0,$$

qui montre notamment que $H^i(X, \mathbb{Z}_p(1))$ est p -adiquement séparé et complet.

5.8. De (5.7.2) et (5.7.3) on déduit

$$(5.8.1) \quad H^0(X, \mathbb{Z}_p(1)) = 0,$$

$$(5.8.2) \quad H^1(X, \mathbb{Z}_p(1)) = T_p \text{Pic}(X).$$

Noter que (5.8.1) est également évident sur (5.5.1). La formule (5.8.2) montre que $H^1(X, \mathbb{Z}_p(1))$ est libre de type fini sur $\mathbb{Z}_p$, de rang égal au rang de la partie étale du groupe p -divisible associé à $\text{Pic}_{X/k}$, égal encore au rang de la partie de pente 1 du F-cristal $H^1(X/W)$ (cf. 3.11.2), qui n'est autre que $H^0(W\Omega_X^1)$. Compte tenu de 5.3, (5.5.1) fournit une suite exacte

$$(5.8.3) \quad 0 \rightarrow H^1(X, \mathbb{Z}_p(1)) \rightarrow H^0(W\Omega_X^1) \xrightarrow{1-F} H^0(W\Omega_X^1) \rightarrow 0,$$

qui précise cette relation : $H^1(X, \mathbb{Z}_p(1))$ fournit une « base de points fixes » du F-cristal unité $H^0(W\Omega_X^1)$ (muni de $F = p^{-1}F$).

Pour $i=2$, (5.7.4) s'écrit :

$$(5.8.4) \quad 0 \rightarrow \text{NS}(X)/p^n \rightarrow H^2(X, \mu_{p^n}) \rightarrow_p H^2(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow 0,$$

où $\text{NS}(X) = \text{Pic}(X)/\text{Pic}^0(X)$ est le groupe de Néron-Sévéri de X . Comme ce dernier est de type fini sur $\mathbb{Z}$, (5.7.6) pour $i=2$ s'écrit :

$$(5.8.5) \quad 0 \rightarrow \text{NS}(X) \otimes \mathbb{Z}_p \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_p(1)) \rightarrow T_p H^2(X, \mathbb{G}_m) \rightarrow 0.$$

$H^2(X, \mathbb{G}_m)$ est ce que Grothendieck appelle le « groupe de Brauer cohomologique » de X [29]; il s'identifie au groupe de Brauer habituel $\text{Br}(X)$ quand X est de dimension ≤ 2 ([29], II 2.2).

PROPOSITION 5.9. — $H^2(X, \mathbb{Z}_p(1))$ [resp. $T_p H^2(X, \mathbb{G}_m)$] est un $\mathbb{Z}_p$ -module de type fini (resp. libre de type fini).

Compte tenu de (5.8.5), il suffit de prouver l'assertion relative à $H^2(X, \mathbb{Z}_p(1))$. Comme $H^2(X, \mathbb{Z}_p(1))$ est p -adiquement séparé et complet, il s'agit de montrer que $H^2(X, \mathbb{Z}_p(1))/p$ est fini. Comme Artin le fait observer [1], le fait que $U^1(X, \mu_{p^n}) = 0$ (5.7.3) entraîne, par la suite de Kummer, que, pour n assez grand, la flèche $U^2(X, \mu_{p^{n-1}}) \rightarrow U^2(X, \mu_{p^n})$ définie par

l'injection $\mu_{p^{n-1}} \hookrightarrow \mu_{p^n}$ est surjective, donc que le pro-objet $U^2(X, \mu_{p^n})$ est essentiellement nul. Par suite, on a

$$H^2(X, \mathbb{Z}_p(1)) = \varprojlim D^2(X, \mu_{p^n}).$$

Comme, pour n assez grand, $U^2(X, \mu_{p^{n-1}}) \rightarrow U^2(X, \mu_{p^n})$ est surjectif, la suite $0 \rightarrow \mu_{p^{n-1}} \rightarrow \mu_{p^n} \rightarrow \mu_p \rightarrow 0$ fournit une suite exacte de pro-objets

$$D^2(X, \mu_{p^{n-1}}) \rightarrow D^2(X, \mu_{p^n}) \rightarrow H^2(X, \mu_p)$$

[où $H^2(X, \mu_p)$ est constant]. Par passage à la limite, tenant compte de ce que la flèche de pro-objets « $\varprojlim$ » $\mu_{p^{n-1}} \rightarrow$ « $\varprojlim$ » μ_{p^n} définie par les inclusions $\mu_{p^{n-1}} \hookrightarrow \mu_{p^n}$ s'identifie à la multiplication par p : « $\varprojlim$ » $\mu_{p^n} \rightarrow$ « $\varprojlim$ » μ_{p^n} , on en déduit que $H^2(X, \mathbb{Z}_p(1))/p$ s'identifie à un sous-groupe étale de $H^2(X, \mu_p)$, donc est fini, ce qui achève la démonstration.

Remarque 5.10. — D'après 3.11, la flèche canonique $H^2(W \Omega_X^{\geq 1}) \rightarrow H^2(X/W)$ est injective, donc $H^2(W \Omega_X^{\geq 1})$ [qui s'identifie ainsi à $P^1 H^2(X/W)$] est de type fini sur W . D'autre part, $H^1(W \Omega_X^{\geq 1}) = H^0(W \Omega_X^1)$ (3.3), donc, d'après 5.3 et (5.8.3), (5.5.2) fournit la suite exacte

$$(5.10.1) \quad 0 \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_p(1)) \rightarrow H^2(W \Omega_X^{\geq 1}) \xrightarrow{1-F} H^2(W \Omega_X^{\geq 1}) \rightarrow 0,$$

qui montre à nouveau que $H^2(X, \mathbb{Z}_p(1))$ est de type fini sur $\mathbb{Z}_p$, grâce au lemme suivant :

LEMME 5.11. — *Si F est un endomorphisme σ -linéaire d'un W -module de type fini M , $\text{Ker}(1-F : M \rightarrow M)$ est un $\mathbb{Z}_p$ -module de type fini.*

Par dévissage, grâce à 5.3, on se ramène à supposer M libre, et alors $\text{Ker}(1-F)$ est une « $\mathbb{Z}_p$ -base » du sous- F -cristal unité de M .

PROPOSITION 5.12. — *Supposons X projectif sur k . On a alors*

$$(5.12.1) \quad \rho = b_2 - 2h - r,$$

où $\rho = \text{rg NS}(X)$, $b_2 = \text{rg } H^2(X/W)$, $h = \dim(H^2(X/W) \otimes K)_{[0,1]}$, $r = \text{rg } T_p H^2(X, \mathbb{G}_m)$.

La suite (5.8.5) entraîne

$$\rho = \text{rg } H^2(X, \mathbb{Z}_p(1)) - r.$$

D'autre part, d'après 5.5.3, on a

$$\begin{aligned} \text{rg } H^2(X, \mathbb{Z}_p(1)) &= \dim(H^2(X/W) \otimes K)_{[1]} \\ &= b_2 - \dim(H^2(X/W) \otimes K)_{[0,1]} - \dim(H^2(X/W) \otimes K)_{[1,2]}. \end{aligned}$$

Comme X est projectif, le théorème de Lefschetz fort ([5], [43], [33]) entraîne que

$$\dim(H^2(X/W) \otimes K)_{[0,1]} = \dim(H^2(X/W) \otimes K)_{[1,2]} = h,$$

d'où (5.12.1).

Remarque 5.13. — Rappelons (3.5.3) que

$$h = \dim H^2(W \mathcal{O}_X) \otimes K,$$

et que, si le foncteur Φ^2 d'Artin-Mazur [2] est représentable par un groupe formel lisse, h est la hauteur de la partie p -divisible de Φ^2 . La formule (5.12.1) améliore donc l'inégalité $\rho \leq b_2 - 2h$ établie par Artin-Mazur dans [2] pour une certaine classe de surfaces relevables. Elle montre que, si $\rho = b_2$, $H^2(X/W)$ est purement de pente 1, plus précisément $H^2(W \mathcal{O}_X)$ est extension du module de Cartier d'un groupe formel lisse unipotent par un F-V-module de longueur finie sur W annulé par une puissance de V (correspondant à un groupe radiciel); en particulier, si Φ^2 est représentable par un groupe formel lisse, Φ^2 est unipotent. Rappelons que la réciproque ($H^2(X/W)$ purement de pente 1 $\Rightarrow \rho = b_2$) est conjecturée par Artin-Mazur [2]; elle n'est connue que pour quelques classes de variétés (variétés abéliennes [69], surfaces K3 elliptiques [1], surfaces de Fermat [38]).

C. Noyau de l'endomorphisme $F-p$ de $H^1(X/W)$. — Le résultat suivant complète (5.10.1) :

THÉORÈME 5.14. — Supposons $H^2(X/W)$ sans torsion et $H^0(\Omega_X^1) = H^0(Z_1 \Omega_X^1)$, où $Z_1 \Omega_X^1 = \text{Ker } d : \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_X^2$. Alors on a une suite exacte

$$(5.14.1) \quad 0 \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_p(1)) \xrightarrow{i} H^2(X/W) \xrightarrow{p-F} H^2(X/W),$$

où i est composé de l'injection $H^2(X, \mathbb{Z}_p(1)) \rightarrow H^2(W \Omega_X^{\geq 1})$ de (5.10.1) et de l'injection canonique $H^2(W \Omega_X^{\geq 1}) \rightarrow H^2(X/W)$ (3.11).

Le carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^2(W \Omega_X^{\geq 1}) & \xrightarrow{1-F} & H^2(W \Omega_X^{\geq 1}) \\ j \downarrow & & \downarrow pj \\ H^2(X/W) & \xrightarrow{p-F} & H^2(X/W) \end{array}$$

où j est l'injection canonique, définit, grâce à (5.10.1), une injection

$$(5.14.2) \quad H^2(X, \mathbb{Z}_p(1)) \hookrightarrow N^{\text{def}} \text{Ker}(p-F : H^2(X/W) \rightarrow H^2(X/W)).$$

Soit C le conoyau de (5.14.2). D'après (5.5.3), on a $C \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p = 0$, donc il suffit de prouver que la multiplication par p dans C est injective, i.e. $\text{Tor}_1(C, \mathbb{Z}/p) = 0$. N étant plat sur $\mathbb{Z}_p$ [puisque $H^2(X/W)$ est sans torsion], il revient au même de prouver que la flèche

$$(5.14.3) \quad H^2(X, \mathbb{Z}_p(1))/p \rightarrow N/p$$

déduite de (5.14.2) par réduction mod p est injective. Cela va résulter de l'assertion plus précise :

PROPOSITION 5.15. — Sous les hypothèses de 5.14, la flèche

$$(5.15.1) \quad H^2(X, \mathbb{Z}_p(1))/p \rightarrow H^2(X/W)/p,$$

déduite de i (5.14.1) par réduction modulo p , est injective.

Il revient au même de dire que la flèche

$$(5.15.2) \quad H^2(X, \mathbb{Z}_p(1))/p \rightarrow H_{\text{DR}}^2(X/k).$$

composée de (5.15.1) avec l'injection canonique $H^2(X/W)/p \hookrightarrow H_{\text{DR}}^2(X/k)$ [cf. (4.9.1)], est injective. Nous aurons besoin, pour la démonstration, du résultat suivant :

PROPOSITION 5.16 (cf. 6.15, 6.16). — Soient $A = (\text{Pic}_{X/k, \text{red}}^0)^t$ la variété d'Albanese de X , et $f : X \rightarrow A$ une application canonique [28]. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $H^2(X/W)$ est sans torsion;

(ii) $\text{Pic}_{X/k}$ est réduit, et $f^* H^0(\Omega_A^1) = H^0(Z_1 \Omega_X^1)$ (où $Z_1 \Omega_X^1 = \text{Ker } d : \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_X^2$).

Quand elles sont satisfaisantes, on a :

(iii) $H^0(Z_1 \Omega_X^1) = H^0(Z_\infty \Omega_X^1)$, où $Z_\infty \Omega_X^1 = \bigcap_n Z_n \Omega_X^1$ (0.2.2.2);

(iv) $H^1(\mathcal{O}_X) \xleftarrow{\sim} E_r^{0,1}$, où E_r^{ij} est la suite spectrale de Hodge $E_1^{ij} = H^j(\Omega_X^i) \Rightarrow H_{\text{DR}}^*(X/k)$.

Ce résultat est dû à Berthelot [8]. L'implication [(i) $\Rightarrow$ $\text{Pic}_{X/k}$ réduit], qui est le point essentiel, a été démontrée indépendamment par Nygaard [54], par une méthode analogue. Indiquons rapidement la démonstration. L'application f définit un morphisme de suites exactes

$$(5.16.1) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^0(\Omega_A^1) & \rightarrow & H_{\text{DR}}^1(A/k) & \rightarrow & H^1(\mathcal{O}_A) \rightarrow 0 \\ & & f^* \downarrow & & f^* \downarrow & & f^* \downarrow \\ 0 & \rightarrow & H^0(Z_1 \Omega_X^1) & \rightarrow & H_{\text{DR}}^1(X/k) & \rightarrow & H^1(\mathcal{O}_X) \end{array}$$

où les flèches verticales sont injectives, et l'image de $H_{\text{DR}}^1(X/k) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X)$ est $E_\infty^{0,1}$ (Oda [56], 5.12, Remark). D'après 3.11.2, $f^* : H^1(A/W) \rightarrow H^1(X/W)$ est un isomorphisme, donc le conoyau de la flèche médiane de (5.16.1) s'identifie, par (4.9.1), à $\text{Tor}_1^W(H^2(X/W), k) = {}_p H^2(X/W)$. De (5.16.1) on déduit donc une suite exacte

$$(5.16.2) \quad 0 \rightarrow H^0(Z_1 \Omega_X^1)/f^* H^0(\Omega_A^1) \rightarrow {}_p H^2(X/W) \rightarrow E_\infty^{0,1}/f^* H^1(\mathcal{O}_A) \rightarrow 0.$$

Dire que $\text{Pic}_{X/k}$ est réduit équivaut à dire que $f^* H^1(\mathcal{O}_A) = H^1(\mathcal{O}_X)$, donc (5.16.2) entraîne aussitôt (ii) $\Rightarrow$ (i), et (i) $\Rightarrow H^0(Z_1 \Omega_X^1) = f^* H^0(\Omega_A^1)$. Pour la démonstration de (i) $\Rightarrow \text{Pic}_{X/k}$ réduit, nous renvoyons à Nygaard [54] [l'idée est d'utiliser l'« extension universelle de $\mathcal{O}_X$ par $\mathcal{O}_{X/W}$ » ([5], [10]), qui se réalise comme une extension de complexes $0 \rightarrow W \Omega_X^\bullet \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$: (i) entraîne la surjectivité de $H^1(E) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X)$, qui se factorise par $H^1(W \Omega_X^\bullet) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X)$]. Supposons $H^2(X/W)$ sans torsion. Alors (5.16.2) et le fait que $\text{Pic}_{X/k}$ est réduit [i.e. $f^* H^1(\mathcal{O}_A) = H^1(\mathcal{O}_X)$] entraînent (iv). Rappelons d'autre part, que, d'après Oda [56], 5.12 (cf. aussi 6.14), on a une injection naturelle $\text{DM}({}_V \text{Pic}_{X/k}) \hookrightarrow H^0(Z_1 \Omega_X^1)$, dont l'image est $H^0(Z_\infty \Omega_X^1)[{}_V \text{Pic}_{X/k}]$ désigne le groupe fini noyau de V dans $\text{Pic}_{X/k}$, $M({}_V \text{Pic}_{X/k})$ son module de Dieudonné (contravariant), qui est un W -module de longueur finie, et $\text{DM}(\quad)$, son dual à valeurs dans K/W . L'application f donne lieu à un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{DM}({}_V \text{Pic}_{A/k}) & \xrightarrow{\sim} & H^0(\Omega_A^1) \\ f^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ \text{DM}({}_V \text{Pic}_{X/k}) & \hookrightarrow & H^0(Z_1 \Omega_X^1) \end{array}$$

où la flèche horizontale supérieure est un isomorphisme (*loc. cit.*). Comme $H^2(X/W)$ est sans p -torsion, les injections $NS(X) \otimes \mathbb{Z}_p \hookrightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_p(1)) \xrightarrow{i} H^2(X/W)$ [(5.8.5), (5.14.1)] entraînent que $NS(X)$ est sans p -torsion, donc ${}_v\text{Pic}_{X/k} = {}_v\text{Pic}_{X/k}^0$, et comme $\text{Pic}_{X/k}$ est réduit, la flèche verticale de gauche est donc un isomorphisme, d'où (iii), ce qui achève la démonstration de 5.16.

Remarque 5.16.3. — Au lieu de (5.16.1), on peut utiliser le morphisme de suites exactes (cf. 3.11) :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & H^0(W\Omega_X^1)/p & \rightarrow & H^1(X/W)/p & \rightarrow & H^1(W\mathcal{O}_X)/p \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & H^0(Z_1\Omega_X^1) & \rightarrow & H_{\text{DR}}^1(X/k) & \rightarrow & H^1(\mathcal{O}_X) \end{array}$$

donné par la projection de $W\Omega_X^1$ sur Ω_X^1 . La suite du serpent correspondante s'écrit :

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(Z_1\Omega_X^1)/(\text{Im } H^0(W\Omega_X^1)/p + \text{Im } H^1(W\mathcal{O}_X)/F) &\rightarrow {}_pH^2(X/W) \\ &\rightarrow E_\infty^{01}/\text{Im}(H^1(W\mathcal{O}_X)/V) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

On voit facilement que $\text{Im } H^1(W\mathcal{O}_X)/V$ s'identifie à $f^*H^1(\mathcal{O}_A)$ et

$$\text{Im } H^0(W\Omega_X^1)/p + \text{Im } H^1(W\mathcal{O}_X)/F = \text{Im } H^1(X/W)/F$$

à $f^*H^0(\Omega_A^1)$.

Démonstration de 5.15. — Revenant aux définitions, on voit que la flèche

$$H^2(X, \mathbb{Z}_p(1)) \rightarrow H_{\text{DR}}^2(X/k) \quad (5.15.2)$$

est limite projective des flèches

$$H^1(\mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p^n}) \rightarrow H_{\text{DR}}^2(X/k)$$

définies par les homomorphismes de complexes $d \log : \mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p^n}[-1] \rightarrow \Omega_{X/k}^1$. D'autre part, $p : H^2(X, \mathbb{Z}_p(1)) \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_p(1))$ est limite projective des flèches $H^1(\mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p^{n-1}}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p^n})$ définies par l'élévation à la puissance p -ième : $\mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p^{n-1}} \xrightarrow{p} \mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p^n}$. Il suffit donc de prouver que, pour tout $n \geq 1$, la suite

$$(5.15.3) \quad 0 \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p^{n-1}}) \xrightarrow{p} H^1(\mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p^n}) \xrightarrow{d \log} H_{\text{DR}}^2(X/k)$$

est exacte. Notons d'abord que la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p^{n-1}} \xrightarrow{p} \mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p^n} \rightarrow \mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p} \rightarrow 0$$

fournit la suite exacte

$$0 \rightarrow {}_{p^{n-1}}\text{Pic}(X) \rightarrow {}_p\text{Pic}(X) \xrightarrow{p^{n-1}} {}_p\text{Pic}(X) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p^{n-1}}) \xrightarrow{p} H^1(\mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p^n}).$$

L'hypothèse que $H^2(X/W)$ est sans torsion entraîne, comme on l'a déjà observé, que $NS(X)$ est sans p -torsion, donc ${}_p\text{Pic}(X) = {}_p\text{Pic}^0(X)$, et $p^{n-1} : {}_p\text{Pic}(X) \rightarrow {}_p\text{Pic}(X)$ est surjectif, ce qui

prouve l'injectivité de p dans (5.15.3). D'autre part, $d \log : H^1(\mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p'}) \rightarrow H_{\text{DR}}^2(X/k)$ se factorise en

$$H^1(\mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p'}) \xrightarrow{d \log} H^2(\Omega_X^{\geq 1}) \xrightarrow{u} H_{\text{DR}}^2(X/k),$$

où la première flèche est induite par $d \log : \mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p'}[-1] \rightarrow \Omega_X^{\geq 1}$, et u par l'injection canonique $\Omega_X^{\geq 1} \rightarrow \Omega_X^*$. Grâce à 5.16 (iv), u est injectif, donc on est ramené à prouver l'exactitude de la suite

$$(5.15.4) \quad 0 \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p'^{-1}}) \xrightarrow{p} H^1(\mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p'}) \xrightarrow{d \log} H^2(\Omega_X^{\geq 1}).$$

La suite exacte évidente

$$0 \rightarrow \Omega_X^{\geq 1} \rightarrow L(n) \rightarrow \mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p'} \rightarrow 0,$$

où

$$L(n) = (\mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p'} \xrightarrow{d \log} \Omega_X^1 \xrightarrow{d} \Omega_X^2 \xrightarrow{d} \dots),$$

fournit la suite exacte

$$(5.15.5) \quad H^0(Z_1, \Omega_X^1) \xrightarrow{a} H^1(L(n)) \xrightarrow{b} H^1(\mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p'}) \xrightarrow{d \log} H^2(\Omega_X^{\geq 1}).$$

Noter que $H^1(L(n)) = H^1(M(n))$, où $M(n)$ est le tronqué

$$M(n) = (\mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p'} \xrightarrow{d \log} Z_1, \Omega_X^1).$$

Cela étant, soit $x \in H^1(\mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p'})$ tel que $d \log(x) = 0$. Alors, d'après (5.15.5), $x = by$, avec $y \in H^1(M(n))$. La donnée de y est une sorte de « connexion intégrable » sur x . On va montrer qu'on peut modifier cette « connexion » par une forme fermée (i.e. un élément de l'image de a) de manière à la rendre de « p -courbure » nulle : x sera alors une « puissance p -ième ». Pour ce faire, considérons la suite exacte de complexes (suite exacte pour la topologie étale) (02.1.23) :

$$(5.15.6) \quad \begin{array}{ccc} 0 & & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p'} & \xrightarrow{d \log} & v(1) \\ \parallel & & \downarrow \\ (\mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p'}) & \xrightarrow{d \log} & Z_1, \Omega_X^1 = M(n) \\ \downarrow & & \downarrow 1-C \\ 0 & \longrightarrow & \Omega_X^1 \\ & & \downarrow \\ & & 0 \end{array}$$

où $v(1) \stackrel{\text{dfn}}{=} \text{Ker}(1 - C)$. D'après (0 2.1.23), on a une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p^{r-1}} \xrightarrow{p} \mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p^r} \xrightarrow{d \log} v(1) \rightarrow 0,$$

donc (5.15.6) fournit la suite exacte

$$(5.15.7) \quad 0 \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p^{r-1}}) \xrightarrow{p} H^1(M(n)) \xrightarrow{\psi} H^0(\Omega_X^1),$$

où ψ est l'analogue d'une p -courbure. Le composé

$$\psi a : H^0(Z_1, \Omega_X^1) \rightarrow H^0(\Omega_X^1)$$

est induit par $1 - C$, donc (5.3) est surjectif puisque, par hypothèse, $H^0(\Omega_X^1) = H^0(Z_1, \Omega_X^1)$. Il existe donc $z \in H^0(Z_1, \Omega_X^1)$ tel que $\psi y = \psi az$. Par (5.15.7), il existe alors $w \in H^1(\mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p^{r-1}})$ tel que $pw = y - az$. Comme le composé

$$H^1(\mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p^{r-1}}) \xrightarrow{p} H^1(M(n)) \xrightarrow{b} H^1(\mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p^r})$$

est égal à p , il en résulte que $x = b(y - az)$ est dans l'image de p , ce qui prouve l'exactitude de (5.15.4) et achève la démonstration de 5.15, et par suite, de 5.14.

Remarques 5.17. — (a) L'exactitude de (5.15.4) équivaut en fait à celle de

$$(5.17.1) \quad 0 \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X^*/\mathcal{O}_X^{*p}) \xrightarrow{d \log} H^2(\Omega_X^{\geq 1})$$

(cas particulier $n=1$), dont la vérification (par le même principe) est légèrement plus aisée.

(b) Raynaud fait observer (cf. aussi [54]) que, si X est une surface, il ne peut exister de 1-formes globales non fermées sur X que si $H^2(W \mathcal{O}_X)$ n'est pas de type fini sur W (i.e. « $\widehat{\text{Br}}_X$ contient une partie unipotente non triviale »). En effet, si $H^2(W \mathcal{O}_X)$ est de type fini sur W , la suite spectrale des pentes dégénère en E_1 (3.14), en particulier $d_1 : H^2(W \mathcal{O}_X) \rightarrow H^2(W \Omega_X^1)$ est nul. Comme $H^2(W \mathcal{O}_X) \rightarrow H^2(\mathcal{O}_X)$ est surjectif, il en résulte que $d : H^2(\mathcal{O}_X) \rightarrow H^2(\Omega_X^1)$ est nul, donc, par dualité de Serre, que $d : H^0(\Omega_X^1) \rightarrow H^2(\Omega_X^2)$ est nul.

D'autre part, si X est une surface, les hypothèses de 5.14 entraînent que la suite spectrale de Hodge $E_1^{ij} = H^j(\Omega_X^i) \Rightarrow H_{\text{DR}}^*(X/k)$ dégénère en E_1 . En effet, le fait que $d_1 : H^0(\Omega_X^1) \rightarrow H^0(\Omega_X^2)$ soit nul entraîne, par dualité, que $d_1 : H^2(\mathcal{O}_X) \rightarrow H^2(\Omega_X^1)$ est nul. D'autre part, d'après 5.16, $d_1 : H^1(\mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(\Omega_X^1)$ et $d_2 : H^1(\mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(\Omega_X^2)$ sont nuls, donc, par dualité, $d_2 : H^2(\mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(\Omega_X^2)$ est nul. Enfin, $d_1 : H^0(\mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(\Omega_X^1)$ est trivialement nul, donc aussi $d_1 : H^2(\Omega_X^1) \rightarrow H^2(\Omega_X^2)$ par dualité.

(c) La conclusion de 5.15 est encore valable si, au lieu des hypothèses de 5.14, on suppose seulement que, dans la suite spectrale de Hodge, on a $E_1^{01} \xrightarrow{\sim} H^1(\mathcal{O}_X)$ et $d_1 : H^0(\Omega_X^1) \rightarrow H^0(\Omega_X^2)$ est nul. En effet, la démonstration ci-dessus montre qu'alors les suites (5.15.3), avec le zéro à gauche ôté, sont exactes, et, comme les conditions de ML requises sont vérifiées, on en déduit, par passage à la limite, l'exactitude de (5.15.2).

J'ignore si, pour la validité de la conclusion de 5.14, les hypothèses faites sont minimales.

Ogus [60] a obtenu indépendamment le corollaire suivant de 5.15, qui a d'ailleurs inspiré 5.14 et 5.15 :

COROLLAIRE 5.18. — Si $E_\infty^{01} \xrightarrow{\sim} H^1(\mathcal{O}_X)$ et $H^0(\Omega_X^1) = H^0(Z_1 \Omega_X^1)$, l'application $d \log : \text{Pic}(X) = H^1(\mathcal{O}_X^*) \rightarrow H_{\text{DR}}^2(X/k)$ induit une injection

$$(5.18.1) \quad \text{Pic}(X)/p = \text{NS}(X)/p \rightarrow H_{\text{DR}}^2(X/k).$$

En effet, comme $T_p H^2(X, \mathbb{G}_m)$ est sans torsion, l'injection $\text{NS}(X) \otimes \mathbb{Z}_p \hookrightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_p(1))$ (5.8.5) induit une injection $\text{NS}(X)/p \hookrightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_p(1))/p$, dont le composé avec la flèche (5.15.2), injective d'après 5.17 (c), est (5.18.1). On peut dire aussi que (5.18.1) est composé des injections $\text{NS}(X)/p \hookrightarrow H^2(X, \mu_p)$ (5.8.4), $H^2(X, \mu_p) \hookrightarrow H^2(\Omega_X^{\geq 1})$ [5.17 (c)] et $H^2(\Omega_X^{\geq 1}) \hookrightarrow H_{\text{DR}}^2(X/k)$.

Remarque 5.19. — Il n'est pas vrai en général que, sous les hypothèses de 5.14, la flèche

$$(5.19.1) \quad H^2(X, \mathbb{Z}_p(1))/p \rightarrow H^1(\Omega_X^1),$$

composée de l'injection $H^2(X, \mathbb{Z}_p(1))/p \hookrightarrow H^2(\Omega_X^{\geq 1})$ (5.15.4) et de la flèche canonique $H^2(\Omega_X^{\geq 1}) \rightarrow H^1(\Omega_X^1)$, soit injective. Par exemple, d'après Ogus [60], la flèche (5.19.1) n'est pas injective si X est la surface de Kummer associée à un produit de courbes elliptiques supersingulières. Ogus (*loc. cit.*) montre cependant que (5.19.1) est injective si X est une surface K3 supersingulière ayant $\sigma_0 > 1$, plus généralement il donne le critère suivant (de démonstration facile, voir *loc. cit.*) :

PROPOSITION 5.19.2. — Supposons que X soit une surface vérifiant les hypothèses de 5.14 et telle que $\text{Fil}^2 H_{\text{DR}}^2(X/k) \cap \text{Fil}_0 H_{\text{DR}}^2(X/k) = 0$, où Fil^i (resp. Fil_i) désigne la filtration de Hodge (resp. la filtration conjuguée). Alors la flèche (5.19.1) est injective.

Le corollaire ci-après de 5.14 fournit une nouvelle réponse partielle à la question 3.6 [cf. 4.10 (a)] :

COROLLAIRE 5.20. — Sous les hypothèses de 5.14, supposons de plus que le F -cristal $H^2(X/W)$ soit purement de pente 1. Alors $P^1 H^2(X/W) (= H^2(W, \Omega_X^{\geq 1}))$ (3.11) est le plus grand sous- F -cristal M de $H^2(X/W)$ tel que $F(M) \subset pM$; muni de $p^{-1}F (= F')$ (5.5), $P^1 H^2(X/W)$ est un F -cristal unité.

Soit E le plus grand sous- F -cristal M de $H^2(X/W)$ tel que $F(M) \subset pM$. D'après 3.1.4, on a $P^1 H^2(X/W) \subset E$. Comme $H^2(X/W)$ est purement de pente 1, $P^1 H^2(X/W)$ et E , munis de $p^{-1}F$, sont des F -cristaux unités, donc il suffit de prouver que

$$(\star) \quad P^1 H^2(X/W)_{F-p} = E_{F-p},$$

où l'indice $F-p$ désigne le noyau de $F-p$. D'après (5.10.1), on a des injections

$$H^2(X, \mathbb{Z}_p(1)) \hookrightarrow P^1 H^2(X/W)_{F-p} \hookrightarrow E_{F-p} \hookrightarrow H^2(X/W)_{F-p}.$$

En vertu de 5.14, leur composé est un isomorphisme, d'où (★) et le corollaire.

Remarque 5.21. — Sous les hypothèses de 5.20, $\text{Pic}_{X/k}$ est lisse (5.16), donc [2] le foncteur Φ^2 d'Artin-Mazur est représentable par un groupe formel lisse, de module de Cartier $H^2(W \mathcal{O}_X)$. L'hypothèse que $H^2(X/W)$ est purement de pente 1 entraîne (3.5.3) que $H^2(W \mathcal{O}_X)$ est annulé par p^n , pour $n \in \mathbb{N}$ [il revient au même de dire que Φ^2 est unipotent, annulé par V^n , i.e. $H^2(W \mathcal{O}_X)$ annulé par F^n]. Donc $H^2(X/W)/P^1 = E_\infty^{02} \subset H^2(W \mathcal{O}_X)$ est aussi annulé par p^n , en d'autres termes on a l'inclusion suivante (non évidente sur la caractérisation 5.20) :

$$(5.21.1) \quad p^n H^2(X/W) \subset P^1 H^2(X/W).$$

D'autre part, la projection $W \Omega_X^\bullet \rightarrow \Omega_X^\bullet$ induit un homomorphisme de la suite spectrale des pentes dans la suite spectrale de Hodge de X/k . Si $H^3(X/W)$ est sans torsion, la formule des coefficients universels (4.9.1) entraîne que la flèche canonique $H^2(X/W) \rightarrow H_{\text{DR}}^2(X/k)$ est surjective, donc induit une surjection

$$(5.21.2) \quad H^2(X/W)/P^1 H^2(X/W) \twoheadrightarrow H_{\text{DR}}^2(X/k)/\text{Fil}^1 H_{\text{DR}}^2(X/k).$$

Quand X est une surface, le second membre s'identifie à $H^2(\mathcal{O}_X)$ (5.17 b), de sorte que (5.21.2) permet de minorer la valuation p -adique de la forme induite par le cup-produit sur $P^1 H^2(X/W)$; par exemple, si X est une surface K 3, (5.21.2) entraîne $\sigma_0 \geq 1$ (cf. 7.2, [1] et [60]). Cela résulte du fait suivant :

PROPOSITION 5.21.3. — *Soit X/k une surface telle que $H^2(X/W)$ soit sans torsion et que le terme E_2^{02} de la suite spectrale des pentes (égal à E_∞^{02} d'après 3.14) soit de longueur finie σ_0 . Alors le discriminant de la forme induite par le cup-produit sur $P^1 H^2(X/W)$ est de valuation p -adique $2\sigma_0$.*

En effet, la dualité de Poincaré entraîne que la forme cup-produit sur $H^2(X/W)$ est unimodulaire.

Remarque 5.21.4. — Si X est une surface, la flèche canonique

$$(5.21.4.1) \quad \text{NS}(X) \otimes \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} H^2(X/W),$$

donnée par « la première classe de Chern », i.e. composée de $\text{NS}(X) \otimes \mathbb{Z}_p \hookrightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_p(1))$ (5.8.5) et de $H^2(X, \mathbb{Z}_p(1)) \hookrightarrow H^2(W \Omega_X^{\geq 1}) = P^1 H^2(X/W) \hookrightarrow H^2(X/W)$ (5.10.1), vérifie :

$$(5.21.4.2) \quad (x \cdot y) = c(x) c(y).$$

(Cette compatibilité a été vérifiée par Berthelot (non publié), une démonstration figurera probablement dans [27]). Sous les hypothèses de 5.21.3, avec k algébriquement clos, on en déduit que, si $\rho = b_2$, le discriminant de la forme d'intersection sur $\text{NS}(X)$ est de valuation p -adique $2\sigma_0$. En effet, on a alors

$$\text{NS}(X) \otimes \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} H^2(X, \mathbb{Z}_p(1)) \xrightarrow{\sim} P^1 H^2(X/W)_{F'=1} (= H^1(W \Omega_X^1)_{F=1}),$$

car $H^2(X/W)$ est purement de pente 1, donc c induit un isomorphisme $NS(X) \otimes W \xrightarrow{\sim} P^1 H^2(X/W)$.

D. *Compléments sur les surfaces.*

5.22. Supposons que X soit une surface. Comme $H^1(W\Omega_X^1)$ est de type fini sur W (3.14), (5.5.1) fournit, grâce à 5.3, la suite exacte

$$(5.22.1) \quad 0 \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_p(1)) \rightarrow H^1(W\Omega_X^1) \xrightarrow{1-F} H^1(W\Omega_X^1) \rightarrow 0.$$

Compte tenu de 3.14, celle-ci est reliée à (5.10.1) par le diagramme commutatif suivant, à lignes et colonnes exactes

$$(5.22.2) \quad \begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & H^0(W\Omega_X^2) & \xrightarrow[\simeq]{1-pF} & H^0(W\Omega_X^2) & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 \rightarrow & H^2(X, \mathbb{Z}_p(1)) & \rightarrow & H^2(W\Omega_X^{\geq 1}) & \xrightarrow{1-F'} & H^2(W\Omega_X^{\geq 1}) & \rightarrow 0 \\ & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \rightarrow & H^2(X, \mathbb{Z}_p(1)) & \rightarrow & H^1(W\Omega_X^1) & \longrightarrow & H^1(W\Omega_X^1) & \rightarrow 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & 0 & & 0 & \end{array}$$

D'autre part, (5.7.2) entraîne, par dualité ([9], [51]) :

$$(5.22.3) \quad H^4(X, \mu_{p^r}) = 0,$$

d'où

$$(5.22.4) \quad H^4(X, \mathbb{Z}_p(1)) = 0.$$

Compte tenu de (5.22.1), (5.5.1) fournit donc la suite exacte

$$(5.22.5) \quad 0 \rightarrow H^3(X, \mathbb{Z}_p(1)) \rightarrow H^2(W\Omega_X^1) \xrightarrow{1-F} H^2(W\Omega_X^1) \rightarrow 0.$$

A la différence de $H^2(X, \mathbb{Z}_p(1))$ (5.9), $H^3(X, \mathbb{Z}_p(1))$ n'est pas nécessairement de type fini sur $\mathbb{Z}_p$: par exemple, si X est une surface K3 supersingulière, on a $H^3(X, \mathbb{Z}_p(1)) \simeq k$ (cf. [55] et 7.2).

La suite spectrale des pentes permet, grâce à 3.14, de relier $H^2(W\Omega_X^1)$ à $H^3(X/W)$: on a un diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes

$$(5.22.6) \quad \begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & H^2(W\mathcal{O}_X)/E_2^{02} & \xrightarrow{\sim} & H^2(W\mathcal{O}_X)/E_2^{02} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow d_1 & & \\ 0 \rightarrow & H^1(W\Omega_X^2) & \rightarrow & H^3(W\Omega_X^{\geq 1}) & \longrightarrow & H^2(W\Omega_X^1) & \longrightarrow 0 \\ & \parallel & & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 \rightarrow & H^1(W\Omega_X^2) & \rightarrow & H^3(X/W) & \rightarrow & H^2(W\Omega_X^1)/d_1 H^2(W\mathcal{O}_X) & \rightarrow 0 \\ & & & \downarrow & & \downarrow & \\ & & & 0 & & 0 & \end{array}$$

(la suite verticale centrale est fournie par la suite exacte

$$0 \rightarrow W\Omega_X^{\geq 1} \rightarrow W\Omega_X^\bullet \rightarrow W\mathcal{O}_X \rightarrow 0,$$

la suite horizontale médiane par la suite exacte

$$0 \rightarrow W\Omega_X^2[-2] \rightarrow W\Omega_X^{\geq 1} \rightarrow W\Omega_X^1[-1] \rightarrow 0,$$

et la suite horizontale inférieure est

$$0 \rightarrow E_\tau^{21} \rightarrow H^3(X/W) \rightarrow E_\infty^{12} \rightarrow 0).$$

6. COVECTEURS ET TORSION DE LA COHOMOLOGIE CRISTALLINE.

A. Covecteurs et V-torsion de $H^*(W\mathcal{O}_X)$.

6.1. Soit X un topos annelé en $\mathbb{F}_p$ -algèbres. Pour tout entier $n \geq 0$, notons $W\Omega_X^\bullet(n)$ le complexe

$$(6.1.1) \quad W\Omega_X^\bullet(n) = (W\mathcal{O}_X \xrightarrow{F^n d} W\Omega_X^1 \xrightarrow{d} W\Omega_X^2 \rightarrow \dots \xrightarrow{d} W\Omega_X^i \xrightarrow{d} \dots).$$

Comme $F^n dV^n = d$ (I 2.19), on a une suite exacte

$$(6.1.2) \quad 0 \rightarrow W\Omega_X^\bullet \rightarrow W\Omega_X^\bullet(n) \rightarrow W_n\mathcal{O}_X \rightarrow 0,$$

où l'injection est définie par V^n en degré 0 et l'identité en degré > 0 . Comme d'autre part $F^{n+1} dV = F^n d$ (I 2.19), on a un morphisme de suites exactes

$$(6.1.3) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow & W\Omega_X^\bullet & \longrightarrow & W\Omega_X^\bullet(n) & \longrightarrow & W_n\mathcal{O}_X & \longrightarrow 0 \\ & \parallel & & \downarrow & & \downarrow v & \\ 0 \rightarrow & W\Omega_X^\bullet & \rightarrow & W\Omega_X^\bullet(n+1) & \rightarrow & W_{n+1}\mathcal{O}_X & \rightarrow 0 \end{array}$$

où la flèche médiane est V en degré 0 et l'identité en degré > 0 . Par passage à la limite inductive suivant (6.1.3), les suites (6.1.2) fournissent une suite exacte

$$(6.1.4) \quad 0 \rightarrow W\Omega_X^\bullet \rightarrow BW^\bullet\Omega_X^\bullet \rightarrow CW^\bullet\mathcal{O}_X \rightarrow 0,$$

où

$$(6.1.5) \quad BW^\bullet\mathcal{O}_X = \varinjlim_V W\mathcal{O}_X, \quad CW^\bullet\mathcal{O}_X = \varinjlim_V W_n\mathcal{O}_X,$$

sont respectivement le faisceau des bivecteurs unipotents et le faisceau des covecteurs unipotents sur X au sens de Fontaine [24], [26] (et $BW^\bullet\Omega_X^i = W\Omega_X^i$ pour $i > 0$). Les suites (6.1.2) et (6.1.4) sont fonctorielles en X , en un sens évident.

6.2. Nous supposons à partir de maintenant que X satisfait aux hypothèses du n° 3 (dont nous conserverons les notations).

X étant réduit, on a $BW^\bullet\mathcal{O}_X = BW^\bullet\mathcal{O}_X$, $CW^\bullet\mathcal{O}_X = CW^\bullet\mathcal{O}_X$ avec les notations de Fontaine (*loc cit.*); nous écrirons $BW^\bullet\Omega_X^\bullet$ pour $BW^\bullet\Omega_X^\bullet$. D'autre part, X/k étant propre, on a (SGA 4 VI 5.2) :

$$(6.2.1) \quad H^*(CW^\bullet\mathcal{O}_X) = \varinjlim_V H^*(W_n\mathcal{O}_X), \quad H^*(BW^\bullet\Omega_X^\bullet) = \varinjlim H^*(W\Omega_X^\bullet(n)).$$

La suite (6.1.4) fournit une suite exacte longue

$$(6.2.2) \quad \dots \rightarrow H^{i-1}(CW^\bullet\mathcal{O}_X) \xrightarrow{d} H^i(W\Omega_X^\bullet) \rightarrow H^i(W\Omega_X^\bullet) \rightarrow H^i(CW^\bullet\mathcal{O}_X) \rightarrow \dots$$

Identifiant $H^i(W\Omega_X^\bullet)$ à $H^i(X/W)$ par l'isomorphisme canonique (2.8), nous noterons $H^i(X/W)_v$ le sous-module défini par

$$(6.2.3) \quad H^i(X/W)_v \stackrel{\text{dfn}}{=} dH^{i-1}(CW^\bullet\mathcal{O}_X) \subset H^i(X/W).$$

La suite (6.2.2) est limite inductive des suites

$$(6.2.4) \quad \dots \rightarrow H^{i-1}(W_n\mathcal{O}_X) \rightarrow H^i(W\Omega_X^\bullet) \rightarrow H^i(W\Omega_X^\bullet(n)) \rightarrow \dots$$

définies par (6.1.2), et d'après (6.2.1), on a

$$(6.2.5) \quad H^i(X/W)_v = \varinjlim dH^{i-1}(W_n\mathcal{O}_X).$$

Comme $p^n dH^{i-1}(W_n\mathcal{O}_X) = 0$, cette formule montre que l'on a

$$(6.2.6) \quad H^i(X/W)_v \subset H^i(X/W)_{\text{tors}},$$

où $H^i(X/W)_{\text{tors}}$ est le sous-module de torsion de $H^i(X/W)$.

PROPOSITION 6.3. — Pour tout i , la flèche canonique $H^i(X/W) \rightarrow H^i(W \mathcal{O}_X)$ (définie par la projection $W \Omega_X^\bullet \rightarrow W \mathcal{O}_X$) induit un épimorphisme

$$(6.3.1) \quad H^i(X/W)_v \twoheadrightarrow H^i(W \mathcal{O}_X)_{V\text{-tors}},$$

où $H^i(W \mathcal{O}_X)_{V\text{-tors}}$ désigne le sous-module de V -torsion de $H^i(W \mathcal{O}_X)$.

Compte tenu de (6.2.5), il suffit de prouver le fait, plus précis, que, pour tout $n \geq 0$, la flèche canonique $H^i(X/W) \rightarrow H^i(W \mathcal{O}_X)$ induit un épimorphisme

$$(6.3.2) \quad dH^{i-1}(W_n \mathcal{O}_X) \rightarrow {}_{V^n}H^i(W \mathcal{O}_X) \stackrel{\text{dfn}}{=} \text{Ker } V^n : H^i(W \mathcal{O}_X) \rightarrow H^i(W \mathcal{O}_X).$$

Or le morphisme évident de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & W \Omega_X^\bullet & \rightarrow & W \Omega_X^\bullet(n) & \rightarrow & W_n \mathcal{O}_X \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & W \mathcal{O}_X & \xrightarrow{V^n} & W \mathcal{O}_X & \longrightarrow & W_n \mathcal{O}_X \rightarrow 0, \end{array}$$

où la suite supérieure est (6.1.2), induit un morphisme des suites exactes longues correspondantes

$$(6.3.3) \quad \begin{array}{ccccccc} \dots & \rightarrow & H^{i-1}(W_n \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{d} & H^i(W \Omega_X^\bullet) & \rightarrow & H^i(W \Omega_X^\bullet(n)) \rightarrow \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \rightarrow & H^{i-1}(W_n \mathcal{O}_X) & \rightarrow & H^i(W \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{V^n} & H^i(W \mathcal{O}_X) \longrightarrow \dots \end{array}$$

qui montre que la flèche (6.3.2) est surjective.

Remarque 6.4. — La V -torsion de $H^i(W \mathcal{O}_X)$ mesure essentiellement le défaut de représentabilité ⁽⁴⁾ du foncteur Φ^i d'Artin-Mazur [2]. Plus précisément, si Φ^{i-1} est représentable, on voit facilement (cf. [52], th. p. 196) que Φ^{i-1} est formellement lisse si et seulement si $H^i(W \mathcal{O}_X)$ est sans V -torsion. Pour $i=2$, auquel cas Φ^{i-1} est représentable par $\widehat{\text{Pic}}_{X/k}$, $H^2(W \mathcal{O}_X)_{V\text{-tors}}$ s'identifie canoniquement à $\text{DM}(\widehat{\text{Pic}}_{X/k}/\widehat{\text{Pic}}_{X/k, \text{red}})$, où $M(-)$ désigne le module de Dieudonné contravariant et $D = \text{Hom}_W(-, K/W)$. En effet, d'après Oda ([56], 4.4, 4.6), la suite inférieure de (6.3.3) fournit, par passage à la limite, une suite exacte de $W_\sigma[F, V]$ -modules

$$(6.4.1) \quad 0 \rightarrow H^1(W \mathcal{O}_X) \otimes K/W \xrightarrow{j} H^1(CW \mathcal{O}_X) \rightarrow H^2(W \mathcal{O}_X)_{V\text{-tors}} \rightarrow 0,$$

où j s'identifie canoniquement à l'injection de $\text{DM}(\widehat{\text{Pic}}_{X/k, \text{red}})$ dans $\text{DM}(\widehat{\text{Pic}}_{X/k})$. On peut généraliser cette interprétation pour $i > 2$.

Comme l'image de $H^i(X/W)$ dans $H^i(W \mathcal{O}_X)$ est le terme E_∞^{0i} de la suite spectrale des pentes, 6.3 entraîne :

COROLLAIRE 6.5. — On a, pour tout i :

$$H^i(W \mathcal{O}_X)_{V\text{-tors}} \subset \text{Im}(H^i(X/W)_{\text{tors}} \rightarrow E_\infty^{0i}),$$

⁽⁴⁾ Nous disons, par abus, « représentable » pour « pro-représentable ».

et une suite exacte

$$0 \rightarrow H^i(X/W)_v \cap P^1 H^i(X/W) \rightarrow H^i(X/W)_v \rightarrow H^i(W \mathcal{O}_X)_{V\text{-tors}} \rightarrow 0,$$

où $P^\bullet$ est la filtration canonique (3.1.2).

PROPOSITION 6.6. — On a $H^2(X/W)_v \cap P^1 H^2(X/W) = 0$, i.e. la flèche canonique $H^2(X/W) \rightarrow H^2(W \mathcal{O}_X)$ induit un isomorphisme $H^2(X/W)_r \xrightarrow{\sim} H^2(W \mathcal{O}_X)_{V\text{-tors}}$.
On a, pour tout $n \geq 0$, un morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & W\Omega_X^{\geq 1} & \rightarrow & W\Omega_X^\bullet(n) & \rightarrow & W\mathcal{O}_X \rightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \parallel & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & W\Omega_X^\bullet & \rightarrow & W\Omega_X^\bullet(n) & \rightarrow & W_n \mathcal{O}_X \rightarrow 0 \end{array}$$

où la suite inférieure est (6.1.2), la suite supérieure la suite évidente, et les flèches verticales extrêmes l'injection et la projection canonique. On en déduit un carré commutatif

$$(\star) \quad \begin{array}{ccc} H^1(W \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{F^n d} & H^2(W \Omega_X^{\geq 1}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^1(W_n \mathcal{O}_X) & \rightarrow & H^2(W \Omega_X^\bullet) \end{array}$$

où la flèche horizontale inférieure (resp. supérieure) est donnée par (6.2.4) (resp. induite par l'homomorphisme de complexe $F^n d : W \mathcal{O}_X[-1] \rightarrow W \Omega_X^{\geq 1}$ défini par $F^n d$ en degré 1). Or on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} W \mathcal{O}_X[-1] & \xrightarrow{d} & (0 \rightarrow W \Omega_X^1 & \xrightarrow{d} & W \Omega_X^2 & \xrightarrow{d} & \dots \rightarrow W \Omega_X^i \rightarrow \dots) \\ \parallel & & \downarrow F^n & & \downarrow p^n F^n & & \downarrow p^n F^n \\ W \mathcal{O}_X[-1] & \xrightarrow{F^n d} & (0 \rightarrow W \Omega_X^1 & \xrightarrow{d} & W \Omega_X^2 & \xrightarrow{d} & \dots \rightarrow W \Omega_X^i \rightarrow \dots) \end{array}$$

et, d'après 3.11, la flèche $H^1(W \mathcal{O}_X) \rightarrow H^2(W \Omega_X^{\geq 1})$ induite par la flèche horizontale supérieure est nulle. Il en est donc de même de la flèche horizontale supérieure de $(\star)$, et par suite on a

$$\text{Ker}(H^1(W_n \mathcal{O}_X) \rightarrow H^2(W \Omega_X^\bullet)) \supset \text{Im}(H^1(W \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(W_n \mathcal{O}_X)),$$

donc, grâce à (6.3.3) :

$$\text{Ker}(H^1(W_n \mathcal{O}_X) \rightarrow H^2(W \Omega_X^\bullet)) = \text{Im}(H^1(W \mathcal{O}_X) \rightarrow H^1(W_n \mathcal{O}_X)).$$

La flèche canonique $H^2(X/W) \rightarrow H^2(W \mathcal{O}_X)$ induit donc un isomorphisme $dH^1(W_n \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} {}_v H^2(W \mathcal{O}_X)$, d'où, par passage à la limite, le résultat désiré.

J'ignore si, pour $i > 2$, on a encore $H^i(X/W)_v \cap P^1 H^i(X/W) = 0$.

B. Torsion divisorielle de $H^2(X/W)$.

6.7. Posons

$$(6.7.1) \quad H^2(X/W)_d = P^1 H^2(X/W)_{\text{tors}} \oplus H^2(X/W)_v \subset H^2(X/W)_{\text{tors}},$$

où $P^1 H^2(X/W)_{\text{tors}} = P^1 H^2(X/W) \cap H^2(X/W)_{\text{tors}}$. On a donc un morphisme de suites exactes

$$(6.7.2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & P^1 H^2(X/W)_{\text{tors}} & \rightarrow & H^2(X/W)_d & \rightarrow & H^2(W \mathcal{O}_X)_{v\text{-tors}} \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & P^1 H^2(X/W)_{\text{tors}} & \rightarrow & H^2(X/W)_{\text{tors}} & \longrightarrow & Q^2 \longrightarrow 0 \end{array}$$

où $Q^2 = \text{Im}(H^2(X/W)_{\text{tors}} \rightarrow H^2(W \mathcal{O}_X))$. Nous poserons

$$(6.7.3) \quad H^2(X/W)_e = H^2(X/W)_{\text{tors}} / H^2(X/W)_d (= Q^2 / H^2(W \mathcal{O}_X)_{v\text{-tors}}).$$

Nous dirons que $H^2(X/W)_d$ [resp. $H^2(X/W)_e$] est la *partie divisorielle* [resp. le *quotient exotique* de $H^2(X/W)_{\text{tors}}$]. La terminologie « partie divisorielle » est justifiée par 6.4 et le résultat suivant :

PROPOSITION 6.8. — *Supposons k algébriquement clos. Notons $NS(X)_{p\text{-tors}}$ le sous-module de p -torsion de $NS(X)$. L'injection composée*

$$(6.8.0) \quad NS(X) \otimes \mathbb{Z}_p \xrightarrow{(5.8.5)} H^2(X, \mathbb{Z}_p(1)) \xrightarrow{(5.10.1)} H^2(W \Omega_X^{\geq 1}) \xrightarrow[3.11]{\sim} P^1 H^2(X/W)$$

induit un isomorphisme

$$(6.8.1) \quad NS(X)_{p\text{-tors}} \otimes W \xrightarrow{\sim} P^1 H^2(X/W)_{\text{tors}}.$$

Nous aurons besoin, pour la démonstration, des lemmes suivants :

LEMME 6.8.2. — *Les faisceaux de cohomologie du complexe $W \Omega_X^{\geq 1} / F' W \Omega_X^{\geq 1}$, où F' est l'endomorphisme défini en (I 3.29), sont nuls en degré ≤ 1 .*

En effet, d'après (I 3.21.1.3), l'application $d : W \Omega_X^1 / F' W \Omega_X^1 \rightarrow W \Omega_X^2 / F' W \Omega_X^2$ est injective.

[Bien entendu, 6.8.2 vaut plus généralement sous les hypothèses de (I 3.29)].

LEMME 6.8.3. — *L'application $F' : H^2(W \Omega_X^{\geq 1}) \rightarrow H^2(W \Omega_X^{\geq 1})$ est injective.*

En effet, d'après 6.8.2, on a $H^1(W \Omega_X^{\geq 1} / F' W \Omega_X^{\geq 1}) = 0$.

LEMME 6.8.4. — *Le corps k étant supposé algébriquement clos, soit F un automorphisme σ -linéaire d'un W -module de type fini M . Alors la flèche naturelle $\text{Ker}(1 - F) \otimes_{\mathbb{Z}_p} W \rightarrow M$ est un isomorphisme.*

C'est bien connu : d'après 5.3, le foncteur $\text{Ker}(1 - F)$ est exact sur la catégorie des F -modules de type fini sur W , donc on est ramené, par dévissage au cas standard où M est libre sur W (resp. est annulé par p).

Prouvons 6.8. Comme $T_p H^2(X, \mathbb{G}_m)$ est sans torsion, l'injection $NS(X) \otimes \mathbb{Z}_p \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_p(1))$ induit un isomorphisme sur les parties de torsion

$$NS(X)_{p\text{-tors}} \xrightarrow{\sim} H^2(X, \mathbb{Z}_p(1))_{\text{tors}}.$$

D'autre part, d'après 6.8.3, l'application $F' : H^2(W \Omega_X^{\geq 1})_{\text{tors}} \rightarrow H^2(W \Omega_X^{\geq 1})_{\text{tors}}$ est injective, donc un automorphisme, puisque $H^2(W \Omega_X^{\geq 1})_{\text{tors}}$ est de longueur finie. Grâce à (5.10.1) et 6.8.4, on en conclut que la flèche naturelle $H^2(X, \mathbb{Z}_p(1))_{\text{tors}} \otimes W \rightarrow H^2(W \Omega_X^{\geq 1})_{\text{tors}}$ est un isomorphisme, ce qui achève la démonstration.

Remarque 6.8.5. — Il résulte immédiatement de (5.10.1) et 6.8 que la flèche $NS(X) \otimes W \rightarrow H^2(X/W)$ déduite de (6.8.0) est injective.

C. *Lien avec $H_{\text{DR}}^1(X/k)$ et le sous-espace d'Oda.* — Pour tenter de comprendre le quotient exotique de $H^2(X/W)_{\text{tors}}$, nous allons faire le lien entre $H^2(X/W)_d$ et le sous-espace de $H_{\text{DR}}^1(X/k)$ construit par Oda ([56], 5.10).

6.9. L'extension (6.1.4) définit un morphisme de degré 1 :

$$(6.9.1) \quad CW \mathcal{O}_X \otimes^L \mathbb{Z}/p \rightarrow W \Omega_X^\bullet \otimes^L \mathbb{Z}/p[1],$$

qui donne des morphismes de suites exactes

$$(6.9.2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow H^{i-2}(CW \mathcal{O}_X) \otimes \mathbb{Z}/p & \rightarrow & H^{i-2}(CW \mathcal{O}_X \otimes^L \mathbb{Z}/p) & \rightarrow & {}_p H^{i-1}(CW \mathcal{O}_X) & \rightarrow & 0 \\ & \downarrow & \downarrow^L & & \downarrow & & \\ 0 \rightarrow H^{i-1}(W \Omega_X^\bullet) \otimes \mathbb{Z}/p & \longrightarrow & H^{i-1}(W \Omega_X^\bullet \otimes^L \mathbb{Z}/p) & \longrightarrow & {}_p H^i(W \Omega_X^\bullet) & \rightarrow & 0 \end{array}$$

où les flèches verticales sont induites par les flèches d de (6.2.2). En vue d'interpréter (6.9.2), nous allons décrire un morphisme de complexes donnant (6.9.1). Tout d'abord, en vertu de (I3.16) (et du fait que $W \Omega_X^\bullet$ est sans p -torsion), la projection $W \Omega_X^\bullet \rightarrow \Omega_X^\bullet$ induit un isomorphisme

$$(6.9.3) \quad W \Omega_X^\bullet \otimes^L \mathbb{Z}/p \xrightarrow{\sim} \Omega_X^\bullet.$$

D'autre part, comme $W \mathcal{O}_X$ et $BW \mathcal{O}_X$ sont sans p -torsion, on a un isomorphisme canonique

$$(6.9.4) \quad CW \mathcal{O}_X \otimes^L \mathbb{Z}/p \xrightarrow{\sim} (W \mathcal{O}_X/p \xrightarrow{\varepsilon} BW \mathcal{O}_X/p),$$

où $BW \mathcal{O}_X/p$ est placé en degré 0, et ε est la réduction mod p de l'injection canonique $W \mathcal{O}_X \hookrightarrow BW \mathcal{O}_X$ (6.1.4). Notons par ailleurs

$$(6.9.5) \quad \eta : \mathcal{O}_X \rightarrow CW \mathcal{O}_X,$$

la limite inductive des flèches $V^n : \mathcal{O}_X \rightarrow W_{n+1} \mathcal{O}_X$,

$$(6.9.6) \quad \tau : BW \mathcal{O}_X \rightarrow CW \mathcal{O}_X,$$

la projection canonique (6.1.4), et

$$(6.9.7) \quad \tau_1 : \text{BW } \mathcal{O}_X \rightarrow \text{CW } \mathcal{O}_X,$$

la limite inductive des projections $\text{W } \mathcal{O}_X \rightarrow \text{W}_{n+1} \mathcal{O}_X (n \geq 0)$: dans l'écriture standard des bi- et covecteurs, on a

$$\begin{aligned} \eta(x) &= (0, \dots, 0, x), \\ \tau(y_{-n}, \dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots) &= (y_{-n}, \dots, y_{-1}), \\ \tau_1(y_{-n}, \dots, y_{-1}, y_0, y_1, \dots) &= (y_{-n}, \dots, y_{-1}, y_0). \end{aligned}$$

Cela posé, on a :

LEMME 6.9.8. — La projection canonique $\text{W } \mathcal{O}_X/p \rightarrow \mathcal{O}_X$ et la flèche $\tau_1 : \text{BW } \mathcal{O}_X/p \rightarrow \text{CW } \mathcal{O}_X/F$ induite par (6.9.6) définissent un quasi-isomorphisme

$$(6.9.8.1) \quad \begin{array}{ccc} (\text{W } \mathcal{O}_X/p \xrightarrow{\varepsilon} \text{BW } \mathcal{O}_X/p) & & \\ \downarrow & \searrow \tau_1 & \\ (\mathcal{O}_X \xrightarrow{\eta} \text{CW } \mathcal{O}_X/F) & & \end{array}$$

[où l'on note encore η la flèche déduite de (6.9.5)].

Il est clair que le carré (6.9.8.1) est commutatif. Il s'insère en fait dans un morphisme de suites exactes

$$(6.9.8.2) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow \mathcal{O}_X & \xrightarrow{F} & \text{W } \mathcal{O}_X/p & \rightarrow & \text{BW } \mathcal{O}_X/p & \rightarrow & \text{CW } \mathcal{O}_X/F \rightarrow 0 \\ & \parallel & \downarrow & & \downarrow \tau_1 & & \parallel \\ 0 \rightarrow \mathcal{O}_X & \xrightarrow{F} & \mathcal{O}_X & \rightarrow & \text{CW } \mathcal{O}_X/F & \xrightarrow{V} & \text{CW } \mathcal{O}_X/F \rightarrow 0 \end{array}$$

d'où le lemme.

Enfin, notons

$$(6.9.10) \quad d : \text{CW } \mathcal{O}_X/F \rightarrow \Omega_X^1,$$

la limite inductive des injections $F^n d : \text{W}_{n+1} \mathcal{O}_X/F \rightarrow \Omega_X^1$ (I 3.11.4). Comme $F^n d V^n = d$, on a donc un morphisme de complexes

$$(6.9.11) \quad (\mathcal{O}_X \rightarrow \text{CW } \mathcal{O}_X/F) \rightarrow \Omega_X^\bullet[1],$$

donné par l'identité en degré -1 et $-d$ en degré 0 .

PROPOSITION 6.10. — On a un carré commutatif

$$(6.10.1) \quad \begin{array}{ccc} \text{CW } \mathcal{O}_X \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}/p & \xrightarrow{(6.9.1)} & \text{W } \Omega_X^\bullet \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}/p[1] \\ \downarrow \simeq & & \downarrow (6.9.3) \\ (\mathcal{O}_X \rightarrow \text{CW } \mathcal{O}_X/F) & \xrightarrow{(6.9.11)} & \Omega_X^\bullet[1] \end{array}$$

où la flèche verticale de gauche est composée des isomorphismes (6.9.4) et (6.9.8.1).

Il résulte aisément des définitions qu'on a un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 (W \mathcal{O}_X / p \xrightarrow{\varepsilon} BW \mathcal{O}_X / p) & \xrightarrow{u} & W \Omega_X^\bullet / p [1] \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (\mathcal{O}_X \xrightarrow{\eta} CW \mathcal{O}_X / F) & \xrightarrow{(6.9.11)} & \Omega_X^\bullet [1]
 \end{array}
 \quad (\star)$$

où les flèches verticales sont données par (6.9.1) et (6.9.8.1), et u est l'identité en degré -1 et induit par $-d : BW \mathcal{O}_X \rightarrow W \Omega_X^1$ (cf. 6.1.4) en degré 0. D'autre part, la flèche (6.9.1) est donnée par la projection canonique

$$\text{Cône}(W \Omega_X^\bullet / p \rightarrow BW \Omega_X^\bullet / p) \rightarrow W \Omega_X^\bullet / p [1],$$

et l'on vérifie sans peine que celle-ci fournit un carré commutatif

$$\begin{array}{ccc}
 t_{\leq 0} \text{Cône}(W \Omega_X^\bullet / p \rightarrow BW \Omega_X^\bullet / p) & \rightarrow & W \Omega_X^\bullet / p [1] \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (W \mathcal{O}_X / p \xrightarrow{\varepsilon} BW \mathcal{O}_X / p) & \xrightarrow{u} & W \Omega_X^\bullet / p [1]
 \end{array}
 \quad (\star\star)$$

où la flèche verticale de gauche est la projection évidente, et $t_{\leq 0}$ le foncteur de troncature associant à un complexe L le complexe $(\dots \rightarrow L^{-1} \rightarrow Z^0 \rightarrow 0)$. La commutativité de $(\star)$ et $(\star\star)$ entraîne celle de (6.10.1).

COROLLAIRE 6.11. — Pour $i=2$, dans le carré de droite de (6.9.2) :

$$\begin{array}{ccc}
 H^0(CW \mathcal{O}_X \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}/p) & \rightarrow_p & H^1(CW \mathcal{O}_X) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 H_{DR}^1(X/k) & \longrightarrow & {}_p H^2(X/W)
 \end{array}
 \quad (6.11.1)$$

la flèche horizontale supérieure est un isomorphisme et la flèche verticale de gauche est injective, d'image $H^1(\mathcal{O}_X \xrightarrow{d} B_\infty \Omega_X^1) \subset H_{DR}^1(X/k)$, où $\mathcal{O}_X$ est placé en degré 0, et $B_\infty \Omega_X^1 = \bigcup_n B_n \Omega_X^1$.

Cela résulte aussitôt de 6.10, compte tenu de (I 3.11.4) et du fait que $H^0(CW \mathcal{O}_X) = K/W$ est p -divisible.

COROLLAIRE 6.12. — Avec les notations de 6.11 et (6.2.5), la flèche canonique $H_{DR}^1(X/k) \rightarrow {}_p H^2(X/W)$ induit un épimorphisme

$$H^1(\mathcal{O}_X \xrightarrow{d} B_\infty \Omega_X^1) \rightarrow {}_p H^2(X/W)_v.$$

Comme $H^1(W \mathcal{O}_X) \otimes K/W$ est p -divisible, la suite (6.4.1) montre que l'image de la flèche verticale de droite de (6.11.1) est ${}_p H^2(X/W)_v$, donc 6.12 découle de 6.11.

6.13. On a un isomorphisme canonique de $D(X, \mathbb{Z})$:

$$(6.13.1) \quad CW \mathcal{O}_X \overset{L}{\otimes} \mathbb{Z}/p \xrightarrow{\sim} (CW \mathcal{O}_X \xrightarrow{p} CW \mathcal{O}_X),$$

où le complexe au second membre est concentré en degrés -1 et 0 , d'où, en composant avec (6.9.4) et (6.9.8.1), un isomorphisme

$$(6.13.2) \quad (CW \mathcal{O}_X \xrightarrow{p} CW \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_X \xrightarrow{\eta} CW \mathcal{O}_X/F).$$

Soient U un recouvrement ouvert affine de X ,

$$\check{C}(U, CW \mathcal{O}_X \xrightarrow{p} CW \mathcal{O}_X), \quad \check{C}(U, \mathcal{O}_X \xrightarrow{\eta} CW \mathcal{O}_X/F)$$

les bicomplexes de Čech correspondants. On a

$$\begin{aligned} H^i(CW \mathcal{O}_X \xrightarrow{p} CW \mathcal{O}_X) &= \check{H}^i(U, CW \mathcal{O}_X \rightarrow CW \mathcal{O}_X), \\ H^i(\mathcal{O}_X \xrightarrow{\eta} CW \mathcal{O}_X/F) &= \check{H}^i(U, \mathcal{O}_X \xrightarrow{\eta} CW \mathcal{O}_X/F) \end{aligned}$$

et l'isomorphisme

$$(6.13.3) \quad H^*(U, CW \mathcal{O}_X \xrightarrow{p} CW \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} H^*(U, \mathcal{O}_X \xrightarrow{\eta} CW \mathcal{O}_X/F),$$

induit par (6.13.2) peut être décrit de la manière suivante. Notons δ la différentielle de Čech. Soient $y = (y_{-n}, \dots, y_{-1}) \in \check{C}^i(U, CW \mathcal{O}_X)$, $z = (z_{-(n-1)}, \dots, z_{-1}) \in \check{C}^{i-1}(U, CW \mathcal{O}_X)$ tels que $\delta y = 0$ et $py = \delta z$. Comme $p = VF$, il existe $y' \in \check{C}^i(U, \mathcal{O}_X)$ tel que $\delta y' = 0$ et $Fy + \varepsilon y' = \delta Sz$, où $Sz = (z_{-(n-1)}, \dots, z_{-1}, 0)$. L'isomorphisme (6.13.3) associe à la classe de

$$y + z \in \check{H}^{i-1}(U, CW \mathcal{O}_X \xrightarrow{p} CW \mathcal{O}_X)$$

celle de $y' + (Sz \bmod F) \in \check{H}^{i-1}(U, \mathcal{O}_X \xrightarrow{p} CW \mathcal{O}_X/F)$.

En particulier :

PROPOSITION 6.13.4. — L'injection $_p H^1(CW \mathcal{O}_X) \hookrightarrow H^1_{DR}(X/k)$ définie par (6.11.1) coïncide avec celle définie par Oda ([56], 5.10).

Pour vérifier que l'on peut calculer (6.13.3) par le procédé indiqué ci-dessus, on observe d'abord que (6.13.2) est donné par les quasi-isomorphismes verticaux ci-après :

$$(\star) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X & \xrightarrow{\eta} & CW \mathcal{O}_X/F \\ \uparrow & & \uparrow \\ W \mathcal{O}_X/p & \rightarrow & BW \mathcal{O}_X/p \\ \uparrow \text{ (proj, 0) } & & \uparrow \text{ proj } \\ M & \xrightarrow{(\varepsilon, p)} & BW \mathcal{O}_X \\ \downarrow \text{ (0, } \tau) & & \downarrow \tau \\ CW \mathcal{O}_X & \xrightarrow{p} & CW \mathcal{O}_X \end{array}$$

où $M = (W \mathcal{O}_X \oplus BW \mathcal{O}_X) / \text{Im}((-p, \varepsilon) : W \mathcal{O}_X \rightarrow W \mathcal{O}_X \oplus BW \mathcal{O}_X)$, et $\text{proj} =$ projection canonique. Tout élément de $\check{H}^{i-1}(U, M \rightarrow BW \mathcal{O}_X)$ peut être représenté par un cōcyclope de la

forme $x + y + z$, avec $\delta(x + y) = 0$,

$$\varepsilon x + py = \delta z, \quad x = (x_0, \dots, x_m, \dots), \quad y = (y_{-n}, \dots, y_{-1}, 0, \dots, 0, \dots),$$

$$x + y \in \check{C}^i(U, M), \quad z = (0, z_{-(n-1)}, \dots, z_{-1}, z_0, \dots, z_m, \dots) \in \check{C}^{i-1}(U, \text{BW } \mathcal{O}_X).$$

La projection de $x + y + z$ dans $\check{H}^{i-1}(U, \mathcal{O}_X \xrightarrow{\eta} \text{CW } \mathcal{O}_X / F)$ par $(\star)$ est

$$\text{classe } (x_0 + (z_{-(n-1)}, \dots, z_0)) = \text{classe } (x_0 - \delta z_0 + (z_{-(n-1)}, \dots, z_{-1}, 0)),$$

tandis que la projection de $x + y + z$ dans $\check{H}^{i-1}(U, \text{CW } \mathcal{O}_X \xrightarrow{p} \text{CW } \mathcal{O}_X)$ est la classe de $(y_{-n}, \dots, y_{-1}) + (0, z_{-(n-1)}, \dots, z_{-1})$. La relation $\varepsilon x + py = \delta z$ entraîne

$$F \tau y + \varepsilon(x_0 - \delta z_0) = \delta S \tau z,$$

ce qui fournit la compatibilité désirée.

6.14. *Supposons désormais k algébriquement clos* (cette hypothèse sert surtout à simplifier certains énoncés, à l'aide de 6.8.4).

Notons

$$(6.14.1) \quad H_{\text{DR}}^1(X/k)_d \subset H_{\text{DR}}^1(X/k),$$

l'image de $\text{DM}({}_p \text{Pic}_{X/k})$ (6.4) par l'application d'Oda ([56], 5.10). D'après [56], 4.4, on a

$$\text{DM}({}_p \text{Pic}_{X/k}) = {}_p H^1(\text{CW } \mathcal{O}_X) \oplus ({}_p \text{Pic}(X) \otimes k),$$

et l'application d'Oda :

$$(6.14.2) \quad {}_p H^1(\text{CW } \mathcal{O}_X) \oplus ({}_p \text{Pic}(X) \otimes k) \rightarrow H_{\text{DR}}^1(X/k)$$

est somme de l'injection ${}_p H^1(\text{CW } \mathcal{O}_X) \rightarrow H_{\text{DR}}^1(X/k)$ définie par (6.11.1), et de la flèche composée

$$(6.14.3) \quad {}_p \text{Pic}(X) \otimes k \xrightarrow{d \log} H^0(Z_1 \Omega_X^1) \hookrightarrow H_{\text{DR}}^1(X/k),$$

où la première flèche est définie par $d \log : \mathcal{O}_X^* / \mathcal{O}_X^{*p} \rightarrow Z_1 \Omega_X^1$, ${}_p \text{Pic}(X)$ étant identifié à $H^0(\mathcal{O}_X^* / \mathcal{O}_X^{*p})$. D'après Cartier (02.1.17), $d \log$ identifie $\mathcal{O}_X^* / \mathcal{O}_X^{*p}$ à $(Z_\infty \Omega_X^1)_{1-C}$ (où $Z_\infty \Omega_X^1 = \bigcap Z_n \Omega_X^1$, et l'indice $1-C$ désigne la partie fixe par C), donc $H^0(\mathcal{O}_X^* / \mathcal{O}_X^{*p}) \otimes k$ à $H^0((Z_\infty \Omega_X^1)_{1-C}) \otimes k = H^0(Z_\infty \Omega_X^1)_{1-C} \otimes k$, autrement dit (6.14.3) est injective, d'image $H^0(Z_\infty \Omega_X^1)_{ss}$, partie semi-simple de $H^0(Z_\infty \Omega_X^1)$ dans sa décomposition canonique suivant l'action de C . Il découle de ces remarques que l'application (6.14.2) est injective et que

$$(6.14.4) \quad H_{\text{DR}}^1(X/k)_d = H^1(\mathcal{O}_X \rightarrow B_\infty \Omega_X^1) \oplus H^0(Z_\infty \Omega_X^1)_{ss}.$$

Oda montre aussi que les deux termes de cette somme se regroupent en

$$(6.14.5) \quad H_{\text{DR}}^1(X/k)_d = H^1(\mathcal{O}_X \rightarrow Z_\infty \Omega_X^1).$$

En effet, la suite spectrale conjuguée $E_2^{ij} = H^i(H^j(\Omega_X^*)) \Rightarrow H_{\text{DR}}^*(X/k)$, où le terme E_2^{ij} est identifié à $H^i(\Omega_X^j)$ par l'opération de Cartier, fournit la suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X) \rightarrow H_{\text{DR}}^1(X/k) \rightarrow H^0(\Omega_X^1)_{d_2=0} \rightarrow 0,$$

et Oda montre que $H_{\text{DR}}^1(X/k)_d$ est l'image inverse de $H^0(\Omega_X^1)_{d_2=0} \cap H^0(Z_\infty \Omega_X^1)$. L'inclusion évidente $(\mathcal{O}_X \xrightarrow{d} Z_\infty \Omega_X^1) \rightarrow (\mathcal{O}_X \xrightarrow{d} Z_1 \Omega_X^1)$ donne un morphisme de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X) & \rightarrow & H^1(\mathcal{O}_X \rightarrow Z_\infty \Omega_X^1) & \rightarrow & H^0(Z_\infty \Omega_X^1)_{d_2=0} & \rightarrow & 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \\ 0 \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X) & \longrightarrow & H_{\text{DR}}^1(X/k) & \longrightarrow & H^0(\Omega_X^1)_{d_2=0} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

d'où (6.14.5). On peut aussi utiliser la décomposition de Raynaud (02.5.3) :

$$Z_\infty \Omega_X^1 = B_\infty \Omega_X^1 \oplus (Z_\infty \Omega_X^1)_{ss}, \quad (Z_\infty \Omega_X^1)_{ss} = (Z_\infty \Omega_X^1)_{1-C} \otimes k,$$

grâce à laquelle (6.14.4) entraîne trivialement (6.14.5).

D'autre part, l'homomorphisme $d \log : \mathcal{O}_X^* \rightarrow W \Omega_X^*[1]$ (I 3.29) donne un carré commutatif

$$(6.14.6) \quad \begin{array}{ccc} {}_p \text{Pic}(X) \otimes k & \rightarrow & {}_p \text{NS}(X) \otimes k \\ d \log \downarrow & & \downarrow d \log \\ H_{\text{DR}}^1(X/k) & \rightarrow & {}_p H^2(X/W) \end{array}$$

où les flèches horizontales sont les flèches canoniques et la flèche verticale de droite est induite par (6.8.1).

PROPOSITION 6.15. — Avec la notation (6.7.1), l'application canonique $H_{\text{DR}}^1(X/k) \rightarrow {}_p H^2(X/W)$ induit un épimorphisme $H_{\text{DR}}^1(X/k)_d \rightarrow {}_p H^2(X/W)_d$.

On a

$${}_p H^2(X/W)_d = {}_p H^2(X/W)_v \oplus {}_p P^1 H^2(X/W).$$

D'après 6.11, 6.12, ${}_p H^2(X/W)_v$ est l'image de ${}_p H^1(CW \mathcal{O}_X)$. D'autre part, dans (6.14.6), la flèche horizontale supérieure est surjective (car $\text{Pic}^0(X)$ est p -divisible), et, d'après 6.8, la flèche verticale de droite est injective, d'image ${}_p P^1 H^2(X/W)$, d'où la conclusion.

COROLLAIRE 6.16. — L'application canonique $H_{\text{DR}}^1(X/k) \rightarrow {}_p H^2(X/W)$ induit un isomorphisme

$$(6.16.1) \quad H_{\text{DR}}^1(X/k)/H_{\text{DR}}^1(X/k)_d \xrightarrow{\sim} {}_p H^2(X/W)/{}_p H^2(X/W)_d$$

[donc en particulier une injection $H_{\text{DR}}^1(X/k)/H_{\text{DR}}^1(X/k)_d \hookrightarrow {}_p H^2(X/W)_e$, avec la notation (6.7.3)].

Rappelons [(4.9.1), (6.9.2)] qu'on a la suite exacte

$$0 \rightarrow H^1(X/W) \otimes k \rightarrow H_{\text{DR}}^1(X/k) \rightarrow {}_p H^2(X/W) \rightarrow 0.$$

Compte tenu de 6.15, il suffit donc de prouver que l'image de $H^1(X/W) \otimes k$ est contenue dans $H_{\text{DR}}^1(X/k)_d$. Or, si $f: X \rightarrow A$ est une application canonique de X dans sa variété d'Albanese, on sait (3.11.2) que f induit un isomorphisme $f^*: H^1(A/W) \xrightarrow{\sim} H^1(X/W)$, et que $H^1(A/W) \otimes k \xrightarrow{\sim} H_{\text{DR}}^1(A/k)$. D'autre part, d'après Oda ([56], 5.11), on a $H_{\text{DR}}^1(A/k) = H_{\text{DR}}^1(A/k)_d$, d'où la conclusion par fonctorialité de $H_{\text{DR}}^1(-/k)_d$.

6.17. Le corollaire précédent montre notamment que le quotient exotique de $H^2(X/W)_{\text{tors}}$ contient $H^0(Z_1 \Omega_X^1)/H^0(Z_\infty \Omega_X^1)$. Mumford et Oda ([56], 5.7), et plus récemment W. Lang [44], ont construit des exemples de surfaces X/k possédant des 1-formes globales fermées non indéfiniment fermées, donc pour lesquelles $H^2(X/W)_e \neq 0$.

Il conviendrait de poursuivre l'étude de $H^2(X/W)_{\text{tors}}$ à l'aide des applications canoniques ($n \geq 1$) :

$$(6.17.1) \quad H^1(X/W_n) \rightarrow_{p^n} H^2(X/W)$$

et d'une généralisation convenable de la flèche d'Oda (6.14.2). Posons

$$Z_\infty W_n \Omega_X^1 = \bigcap_{m \geq 0} \text{Ker } dV^m : W_n \Omega_X^1 \rightarrow W_{n+m} \Omega_X^2.$$

Il est très probable que (6.17.1) induit un épimorphisme

$$H^1(W_n \mathcal{O}_X \rightarrow Z_\infty W_n \Omega_X^1) \rightarrow_{p^n} H_{\text{DR}}^2(X/W)_d.$$

Nous espérons pouvoir revenir ultérieurement sur ces questions.

En marge de cette étude, signalons un résultat de dégénérescence partielle, lié à la flèche d'Oda, obtenu récemment par Raynaud :

PROPOSITION 6.18. — Soit $G = {}_p\text{Pic}_{X/k}$. Supposons que $F: G \rightarrow G^{(p)}$ et $V: G^{(p)} \rightarrow G$ vérifient la condition

$$(\star) \quad \text{Im } V = \text{Ker } F.$$

Alors la flèche canonique $H_{\text{DR}}^1(X/k) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X)$ est surjective. Si X se relève en un schéma propre et lisse sur W , alors on a $(\star)$ et $\text{Im } F = \text{Ker } V$.

D'après Oda ([56], 5.12), la flèche canonique $H_{\text{DR}}^1(X/k) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X)$ s'insère dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \text{DM}({}_p\text{Pic}_{X/k}) & \xrightarrow{\sim} & {}_p H^1(CW \mathcal{O}_X) \oplus ({}_p\text{Pic}(X) \otimes k) & \xrightarrow{(6.14.2)} & H_{\text{DR}}^1(X/k) \\ \downarrow F & & \downarrow F & & \downarrow \\ \text{DM}({}_F\text{Pic}_{X/k}) & \xrightarrow{\sim} & {}_V H^1(CW \mathcal{O}_X) & \xrightarrow{\sim} & H^1(\mathcal{O}_X) \end{array}$$

où les isomorphismes horizontaux de gauche sont ceux d'Oda ([56], 4.4), et ${}_V H^1(CW \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathcal{O}_X)$ est défini par l'isomorphisme canonique $\mathcal{O}_X \xrightarrow{\sim} {}_V CW \mathcal{O}_X$ (la vérification de la commutativité du carré de droite est d'ailleurs immédiate à l'aide de la description 6.13). La première assertion en résulte, vu que V (resp. F) : $G \rightarrow G$ induit F

(resp. V) : $DM(G) \rightarrow DM(G)$. Si X se relève en un schéma propre et lisse Y sur W , alors, d'après Raynaud [61], ${}_p\text{Pic}_{Y/W}$ est un schéma en groupes fini et plat sur W , relevant G . D'après Fontaine ([25], th. 1), le fait que G se relève en un groupe fini et plat sur W entraîne que, dans $M = M(G)$, on a $\text{Im } F = \text{Ker } V$, d'où, par dualité de Cartier, $\text{Im } V = \text{Ker } F$, ce qui achève la démonstration.

Remarques. — (a) Au lieu de la référence à Fontaine, on pourrait utiliser les théorèmes de structure des groupes de type $(p, p, \dots, p)$ ([62], [7]).

(b) J'ignore si le fait que X se relève en un schéma propre et lisse sur W engendre d'autres phénomènes de dégénérescence de la suite spectrale de Hodge : peut-il exister sur X des 1-formes globales non fermées ? A-t-on $H_{\text{DR}}^1(X/k) = H_{\text{DR}}^1(X/k)_d$?

7. EXEMPLES. — Les hypothèses et notations sont celles du n° 3.

7.1. *Surfaces abéliennes.* — Soit X/k une variété abélienne de dimension g . On a vu (3.11.2) que le F -cristal $H^1(X/W)$ s'identifie canoniquement au module de Dieudonné du groupe p -divisible associé à X ; il est libre de rang $2g$. De plus, $H^*(X/W)$ est sans torsion, plus précisément la flèche canonique

$$(7.1.1) \quad \Lambda H^1(X/W) \rightarrow H^*(X/W)$$

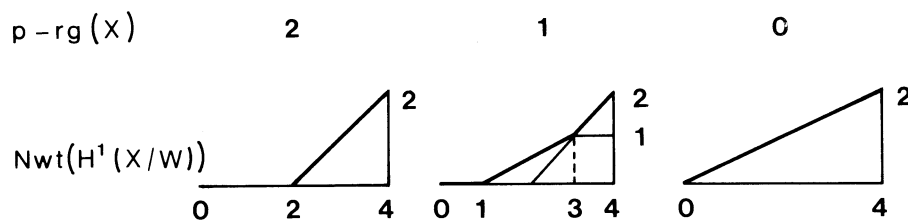
est un isomorphisme. En effet, X se relève en un schéma abélien formel Y/W , et d'après Mazur-Messing ([50], addendum), $\Lambda H_{\text{DR}}^1(Y/W) \rightarrow H_{\text{DR}}^*(Y/W)$ est un isomorphisme.

Rappelons que l'on définit le p -rang de X , $p\text{-rg}(X)$, comme le rang du module de Tate $T_p(X \otimes \bar{k})$, où $\bar{k}$ est une clôture algébrique de k . D'après (5.8.2) et (5.8.3), on a

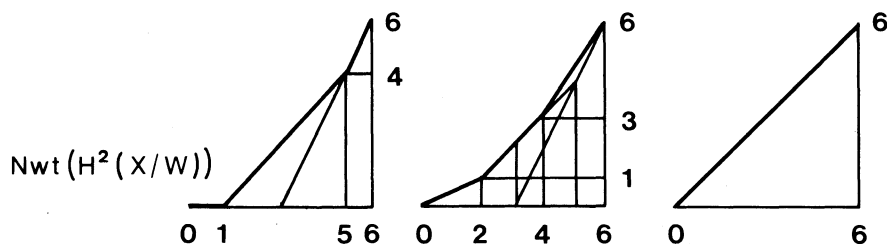
$$(7.1.2) \quad p\text{-rg}(X) = \text{rg } H^1(X/W)_{[1]} = \text{rg } H^1(X/W)_{[0]}$$

(avec les notations 3.4).

Supposons maintenant $g = 2$. Suivant le p -rang de X , le polygone de Newton de $H^1(X/W)$ a l'allure suivante :



Pour $p\text{-rg}(X) = 2$, le polygone de Newton coïncide avec le polygone de Hodge : X est ordinaire. Pour $p\text{-rg}(X) = 0$, la surface X est dite supersingulière. On détermine les polygones de Newton des $H^i(X/W)$ à partir de celui de $H^1(X/W)$ grâce à (7.1.1), par exemple, pour $i = 2$, on trouve, suivant les p -rangs décroissants



Comme $\text{Pic}_{X/k}$ est lisse, le foncteur de Brauer formel $\Phi^2 = \widehat{\text{Br}}_{X/k}$ est représentable par un groupe formel lisse, de dimension $h^{02}=1$, et de module de Cartier $H^2(W\mathcal{O}_X)$. D'après 3.5.6, il est p -divisible de hauteur $h = \dim H^2(W\mathcal{O}_X) \otimes K$ si $H^2(W\mathcal{O}_X) \otimes K \neq 0$: vu la figure ci-dessus, on a donc $h=1$ (resp. 2) pour $p - \text{rg}(X)=2$ (resp. 1). Si $p - \text{rg}(X)=0$, $\widehat{\text{Br}}_{X/k}$ est unipotent, donc isomorphe à $\mathbb{G}_a$, et $H^2(W\mathcal{O}_X)$ s'identifie à $k_\sigma[[x]]$, avec $F=0$, $Vx^n = x^{n+1}$, et $ax = xa^p$ ($a \in k$).

Pour la suite spectrale des pentes, il y a donc lieu de distinguer deux cas :

(a) $p - \text{rg}(X) > 0$. Comme $H^2(W\mathcal{O}_X)$ est de type fini sur W , il découle de 3.7 et 3.14 que tous les $H^j(W\Omega_X^i)$ sont de type fini sur W et que la suite spectrale des pentes dégénère en E_1 . De plus, les $H^j(W\Omega_X^i)$ sont libres sur W . On le sait pour $i+j=1$ (3.11), ainsi que pour $H^2(W\mathcal{O}_X)$, $H^0(W\Omega_X^2)$ (2.17), et $H^2(W\Omega_X^2)$ (3.15). Pour les autres $H^j(W\Omega_X^i)$, cela résulte du fait que $H^0(W\Omega_X^2)$ [resp. $H^1(W\Omega_X^2)$] est facteur direct de $H^2(X/W)$ [resp. $H^3(X/W)$], grâce à la propriété de contact entre polygones de Newton et de Hodge, en vertu du résultat de Katz [42]. D'après 4.10(a), on a donc, pour tout n , une décomposition canonique

$$H^n(X/W) = \bigoplus_{i+j=n} H^j(W\Omega_X^i).$$

(b) $p - \text{rg}(X) = 0$. Comme $H^2(W\mathcal{O}_X) \simeq k_\sigma[[x]]$, il résulte de 3.14 que la seule différentielle non nulle est $d_1 : H^2(W\mathcal{O}_X) \rightarrow H^2(W\Omega_X^1)$, dont le conoyau est $P^1 H^3(X/W) = H^3(X/W) \simeq W^4$ [car $H^1(W\Omega_X^2) = 0$]. On a donc

$$H^2(W\Omega_X^1) \simeq k_\sigma[[y]] \oplus W^4,$$

et d_1 envoie surjectivement $k_\sigma[[x]]$ sur $k_\sigma[[y]]$. Comme $Vd = pdV$, la restriction de V à $k_\sigma[[y]]$ est nulle, en particulier $H^2(W\Omega_X^1)$ n'est pas de type fini sur $W_\sigma[[V]]$! On a $H^0(W\Omega_X^2) = 0$, donc $H^1(W\Omega_X^1) = P^1 H^2(X/W) \simeq W^6$, et le terme E_1 est donné par le tableau :

	$W\mathcal{O}_X$	$W\Omega_X^1$	$W\Omega_X^2$
H^2	$k_\sigma[[x]]$	$\xrightarrow{d_1} k_\sigma[[y]] \oplus W^4$	$\xrightarrow{0} W$
H^1	$H^1(X/W)$	$\xrightarrow{0} W^6$	0
H^0	W	0	0

D'après 3.14, on a $E_2^{02} = E_\infty^{02} = H^2(X/W)/P^1 H^2(X/W) \simeq k^{\sigma_0}$. Supposons maintenant k algébriquement clos. Comme X est supersingulière, on sait [69] que le rang de $\text{NS}(X)$ est égal à $b_2 = 6$. D'après 5.21.4, le discriminant de la forme d'intersection sur $\text{NS}(X)$ est donc

de valuation p -adique $2\sigma_0$. Posons, avec Oda-Oort [57],

$$a(X) = a = \dim_k \operatorname{Hom}(\alpha_p, X) = \dim_k M/(FM + VM), \quad \text{où} \quad M = H^1(X/W).$$

D'après [57], les seules valeurs possibles de a sont 1 et 2; $a=2$ si et seulement si X est isomorphe à un produit de courbes elliptiques supersingulières; pour $a=1$, X est quotient d'un tel produit par un sous-groupe α_p vérifiant certaines conditions de position. Ogus [58] a prouvé que l'on a

$$\sigma_0 + a = 3.$$

(Le cas où $a=2$ résulte assez facilement de ce que $\operatorname{Fil}^1 H_{\text{DR}}^1(X/k) = \operatorname{Fil}_0 H_{\text{DR}}^1(X/k)$, avec les notations de 5.19.2; le cas où $a=1$ s'y ramène, mais non trivialement). Avec les notations du tableau ci-dessus, on voit facilement qu'on peut choisir x et y de manière que $d_1 x^n = 0$ pour $n < \sigma_0$, et $d_1 x^{\sigma_0+n} = y^n$ pour $n \geq 0$; on a alors $Fy^n = 0$ si $n=0$ et $Fy^n = y^{n-1}$ pour $n \geq 1$. On vérifie d'autre part, par exemple à l'aide de la dualité entre H^1 et H^3 , que, sur le morceau libre W^4 de $H^2(W\Omega_X^1)$, F est injectif, de conoyau isomorphe à k^2 . On peut d'ailleurs montrer qu'on a une suite exacte (fonctorielle en la surface abélienne supersingulière X) :

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_X) \rightarrow H^2(W\Omega_X^1) \xrightarrow{F} H^2(W\Omega_X^1) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X) \rightarrow 0.$$

7.2. *Surfaces K 3.* — Soit X/k une surface K 3. Nygaard [55] a obtenu récemment, à l'aide du complexe de De Rham-Witt, une autre démonstration du théorème de Rudakov-Shafarevitch [64], selon lequel $H^0(\Omega_X^1) = 0$. Ce théorème entraîne que $H_{\text{DR}}^1(X/k) = 0$, donc, par la formule des coefficients universels (4.9.1), que $H^2(X/W)$ est sans torsion, donc aussi $H^3(X/W)$. Comme $\operatorname{Pic}_{X/k}^0 = 0$, on a $H^1(X/W) = 0$, donc par dualité, $H^3(X/W) = 0$. On sait enfin que $b_2 = 22$, donc $H^2(X/W)$ est un W -module libre de rang 22.

Le foncteur de Brauer formel $\widehat{\operatorname{Br}}_{X/k}$ est représentable par un groupe formel lisse de dimension $h^{02} = 1$, et de module de Cartier $H^2(W\mathcal{O}_X)$. Comme précédemment, deux cas sont à distinguer pour la suite spectrale des pentes :

(a) $H^2(W\mathcal{O}_X) \otimes K \neq 0$. $\widehat{\operatorname{Br}}_{X/k}$ est alors p -divisible, de hauteur $h = \dim H^2(W\mathcal{O}_X) \otimes K$. De (3.5.3) et de la dualité de Poincaré il résulte que le polygone de Newton de $H^2(X/W)$ a pour pentes $(1 - (1/h), 1, 1 + (1/h))$ avec les multiplicités $(h, 22 - 2h, h)$. Comme $H^2(W\mathcal{O}_X)$ est de type fini sur W , la suite spectrale des pentes dégénère en E_1 . En fait, on voit comme ci-dessus qu'on a une décomposition canonique

$$H^2(X/W) = H^2(W\mathcal{O}_X) \oplus H^1(W\Omega_X^1) \oplus H^0(W\Omega_X^2),$$

compatible à l'opération de F . Le terme $H^0(W\Omega_X^2)$ est non nul (et alors de rang 1) si et seulement si X est ordinaire. La figure formée par les polygones de Newton et de Hodge de $H^2(X/W)$ illustre 4.9(c), avec $A_1 = (h, h-1)$, $A_2 = M_2$ (resp. M_3) si X est ordinaire (resp. non ordinaire).

(b) $H^2(W\mathcal{O}_X) \otimes K = 0$. On a alors $\widehat{\operatorname{Br}}_{X/k} \simeq \widehat{\mathbb{G}}_a$, le polygone de Newton de $H^2(X/W)$ est purement de pente 1 : X est dite supersingulière. Comme plus haut, la seule différentielle non

nulle de la suite spectrale des pentes est $d_1 : H^2(W\mathcal{O}_X) \simeq k_\sigma[[x]] \rightarrow H^2(W\Omega_X^1)$. On a $H^1(W\Omega_X^1) = P^1 H^2(X/W) \simeq W^{22}$, et le terme E_1 est donné par le tableau

	$W\mathcal{O}_X$	$W\Omega_X^1$	$W\Omega_X^2$
$H^2 \dots \dots \dots$	$k_\sigma[[x]] \xrightarrow{d_1} k_\sigma[[y]] \xrightarrow{0} W$		
$H^1 \dots \dots \dots$	0	W^{22}	0
$H^0 \dots \dots \dots$	W	0	0

On a $E_2^{02} = H^2(X/W)/P^1 H^2(X/W) \simeq k^{\sigma_0}$, avec $\sigma_0 \geq 1$ car $H^2(X/W) \rightarrow H^2(\mathcal{O}_X)$ est surjectif; $2\sigma_0$ est la valuation p -adique du discriminant de la forme cup-produit sur $P^1 H^2(X/W)$ (5.21.3). Comme plus haut, $H^1(W\Omega_X^1)$ est un F -cristal unité, dont $H^2(X, \mathbb{Z}_p(1))$ est une base de points fixes (lorsqu'on suppose k algébriquement clos); on ignore en revanche si (pour k alg. clos) $NS(X)$ est de rang 22, i.e. si la flèche canonique $NS(X) \otimes \mathbb{Z}_p \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_p(1))$ est un isomorphisme : on le sait cependant, grâce à Artin [1], quand X est elliptique; dans ce cas, le discriminant de la forme d'intersection sur $NS(X)$ est $-p^{2\sigma_0}$, et Artin [1] montre que σ_0 peut prendre toutes les valeurs telles que $1 \leq \sigma_0 \leq 10$. On détermine le d_1 non nul comme en 7.1, en choisissant x, y de manière que $d_1 x^n = 0$ pour $n < \sigma_0$, $d_1 x^{\sigma_0+n} = y^n$ pour $n \geq 0$; on a alors $Vy^n = 0$ pour tout n , $Fy^n = 0$ si $n = 0$ et $Fy^n = y^{n-1}$ pour $n \geq 1$. Par (5.22.5), on en déduit (pour k alg. clos) $H^3(X, \mathbb{Z}_p(1)) \simeq k$. Le lecteur trouvera dans [60] des compléments très intéressants sur la cohomologie cristalline des $K3$ supersingulières, concernant notamment l'application des périodes d'Artin [1] et la classification des $K3$ supersingulières ayant $\sigma_0 \leq 2$.

7.3. Surfaces d'Enriques. — On suppose k algébriquement clos. On désigne par X/k une surface d'Enriques.

7.3.1. Rappelons quelques résultats de Bombieri-Mumford ([16], § 3 et 4).

- (a) Les nombres de Betti de X sont $(1, 0, 10, 0, 1)$.
- (b) Le nombre de Picard de X [rang de $NS(X)$] est égal à $b_2 = 10$.
- (c) X est de l'un des trois types suivants :
 - (i) *classique* : $H^1(\mathcal{O}_X) = H^2(\mathcal{O}_X) = 0$, $\Omega_X^2 \not\simeq \mathcal{O}_X$, $(\Omega_X^2)^{\otimes 2} \simeq \mathcal{O}_X$;
 - (ii) *singulier* : $H^1(\mathcal{O}_X) \simeq k \simeq H^2(\mathcal{O}_X)$, F bijectif sur $H^1(\mathcal{O}_X)$;
 - (iii) *supersingulier* : $H^1(\mathcal{O}_X) \simeq k \simeq H^2(\mathcal{O}_X)$, F nul sur $H^1(\mathcal{O}_X)$.

Les types (ii) et (iii) n'existent que si $p = 2$. Si X est du type (ii) ou (iii), on a $\Omega_X^2 \simeq \mathcal{O}_X$.

(d)

$$\text{Pic}_{X/k} = \begin{cases} \mathbb{Z}/2 & \text{si } X \text{ est classique,} \\ \mu_2 & \text{si } X \text{ est singulière,} \\ \alpha_2 & \text{si } X \text{ est supersingulière.} \end{cases}$$

Nous allons voir que ces informations suffisent à déterminer la cohomologie cristalline et la cohomologie de De Rham de X , ainsi que la suite spectrale des pentes et la suite spectrale de Hodge.

PROPOSITION 7.3.2. — On a :

$$H^2(W\mathcal{O}_X) = \begin{cases} 0 & \text{si } X \text{ est classique,} \\ k & \text{avec } Fx = x^p, \quad V=0 & \text{si } X \text{ est singulière,} \\ k & \text{avec } F=V=0 & \text{si } X \text{ est supersingulière.} \end{cases}$$

Si X est classique, $\text{Pic}_{X/k}^0 = 0$, donc le foncteur de Brauer formel $\widehat{\text{Br}}_{X/k}$ est représentable par un groupe formel lisse, dont l'espace tangent est $H^2(\mathcal{O}_X) = 0$, donc $\widehat{\text{Br}}_{X/k} = 0$, et $H^2(W\mathcal{O}_X)$, module de Cartier de $\widehat{\text{Br}}_X$, est nul. Supposons X singulière (donc $p=2$). D'après 6.4, on a

$$(\star) \quad H^2(W\mathcal{O}_X)_{V\text{-tors}} \simeq \text{DM}(\mu_2) \simeq (k, \text{ avec } Fx = x^p \text{ et } V=0),$$

donc $H^2(W\mathcal{O}_X)_{V\text{-tors}} = \text{Ker } V : H^2(W\mathcal{O}_X) \rightarrow H^2(W\mathcal{O}_X)$. Notons que, comme $H^1(W\mathcal{O}_X) = 0$ (car $\text{Pic}_{X/k, \text{red}}^0 = 0$), on a la suite exacte

$$(7.3.2.1) \quad 0 \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X) \rightarrow H^2(W\mathcal{O}_X) \xrightarrow{V} H^2(W\mathcal{O}_X) \rightarrow H^2(\mathcal{O}_X) \rightarrow 0.$$

Posons $H^2(W\mathcal{O}_X)/H^2(W\mathcal{O}_X)_{V\text{-tors}} = L$. Considérons l'endomorphisme de la suite exacte $0 \rightarrow H^2(W\mathcal{O}_X)_{V\text{-tors}} \rightarrow H^2(W\mathcal{O}_X) \rightarrow L \rightarrow 0$ défini par V . Compte tenu de (7.3.2.1), la suite du serpent correspondante montre que $L/VL = 0$. Mais, d'après 2.11, $H^2(W\mathcal{O}_X)$ est un $W_\bullet[[V]]$ -module de type fini, donc L est V -adiquement séparé, donc $L = \bigcap V^n L = 0$, i.e. $H^2(W\mathcal{O}_X) = H^2(W\mathcal{O}_X)_{V\text{-tors}}$, ce qui, d'après $(\star)$, prouve la proposition dans le cas singulier. On raisonne de même dans le cas supersingulier.

Noter que la suite du serpent ci-dessus fournit un isomorphisme $H^1(\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} H^2(\mathcal{O}_X)$, qui n'est autre que le Bockstein, comme on le vérifie facilement (cf. [16], § 3, Lemma 1).

COROLLAIRE 7.3.3. — (a) La suite spectrale des pentes de X dégénère en E_1 .

(b) La différentielle $d : H^0(\Omega_X^1) \rightarrow H^0(\Omega_X^2)$ est nulle (i.e. les 1-formes globales sont fermées).

D'après 3.14, (a) découle de ce que $H^2(W\mathcal{O}_X)$ est de type fini sur W . On a déjà vu d'autre part [5.17(b)] que (a) implique (b).

Le résultat 7.3.3(b) a été prouvé indépendamment (et élémentairement !) par W. Lang [44]. Avec les notations de 6.14, il entraîne que $H_{\text{DR}}^1(X/k)_d = H_{\text{DR}}^1(X/k)$, et, comme le montre W. Lang (*loc. cit.*), on en déduit aisément :

COROLLAIRE 7.3.4. — (a) :

$$H_{\text{DR}}^1(X/k) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq 2, \\ k & \text{si } p = 2. \end{cases}$$

(b) Si $p \neq 2$, $H^0(\Omega_X^1) = 0$. Si $p = 2$, $H^0(\Omega_X^1)$ est donné par le tableau

X	Classique	Singulière	Supersingulière
$H^0(\Omega_X^1) \dots \dots \dots \left\{ \begin{array}{l} k \\ H^0(\Omega_X^1) \xrightarrow{\sim} H_{\text{DR}}^1(X/k) \end{array} \right.$	k	0	k
	$H_{\text{DR}}^1(X/k) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathcal{O}_X)$	$H_{\text{DR}}^1(X/k) \xrightarrow{\sim} H^1(\mathcal{O}_X)$	$H^0(\Omega_X^1) \xrightarrow{\sim} H_{\text{DR}}^1(X/k)$

PROPOSITION 7.3.5. — On a $H^0(X/W) \xrightarrow{\sim} W \xrightarrow{\sim} H^4(X/W)$, $H^1(X/W)=0$, et $H^2(X/W)$, $H^3(X/W)$ sont donnés par le tableau

	$H^2(X/W)$	$H^3(X/W)$
$p \neq 2$	W^{10}	0
$p = 2$	$W^{10} \oplus k$	k

Les assertions relatives à H^0 , H^1 , H^4 résultent de ce que X est connexe et $\text{Pic}_{X/k, \text{red}}^0 = 0$. Calculons H^2 et H^3 . Si $p \neq 2$, $\text{NS}(X)$ est sans p -torsion [7.3.1(d)], donc, d'après 6.8, $P^1 H^2(X/W)$ est sans torsion. Comme d'autre part $H^2(W \mathcal{O}_X) = 0$ (7.3.2), on en conclut (6.7.2) que $H^2(X/W)$ est sans torsion, donc isomorphe à W^{10} , puisque $b_2 = 10$ [7.3.1(a)]. Par dualité de Poincaré, on en déduit $H^3(X/W) = 0$. Supposons maintenant $p = 2$. Si X est classique, $H^2(W \mathcal{O}_X) = 0$, donc $P^1 H^2(X/W) = H^2(X/W)$, et, d'après 6.8 et 7.3.1(d), $H^2(X/W)_{\text{tors}} \simeq k$. Donc $H^2(X/W) \simeq W^{10} \oplus k$, et, par dualité, $H^3(X/W) \simeq k$. Si X est non classique, alors $\text{NS}(X)$ est sans torsion [7.3.1(d)], donc (6.8) $P^1 H^2(X/W)_{\text{tors}} = 0$, donc (6.7.2) $H^2(X/W)_{\text{tors}}$ s'injecte dans $H^2(W \mathcal{O}_X)$. Mais $H^2(W \mathcal{O}_X) \simeq k$ (7.3.2), et, d'autre part, la suite exacte des coefficients universels montre, compte tenu de 7.3.4(a), que ${}_p H^2(X/W) \simeq k$. On en conclut que

$$H^2(X/W)_{\text{tors}} \xrightarrow{\sim} H^2(W \mathcal{O}_X) \simeq k, \quad \text{d'où} \quad H^2(X/W) \simeq W^{10} \oplus k$$

et $H^3(X/W) \simeq k$, comme précédemment, ce qui achève la démonstration.

PROPOSITION 7.3.6. — Le terme E_1 de la suite spectrale des pentes est donné par les tableaux suivants :

(a) $p \neq 2$:

0	0	W
0	W^{10}	0
W	0	0

(b) $p = 2$: (i) X classique :

0	k	W
0	$W^{10} \oplus k$	0
W	0	0

(ii) X singulière :

k	0	W
0	W^{10}	k
W	0	0

(iii) X supersingulière :

k	k	W
0	W^{10}	0
W	0	0

Les assertions de 7.3.5 relatives à $H^0(X/W)$, $H^1(X/W)$, $H^4(X/W)$ entraînent aussitôt $H^0(W \mathcal{O}_X) \simeq W \simeq H^2(W \Omega_X^2)$ (3.15), et $H^1(W \mathcal{O}_X) = H^0(W \Omega_X^1) = 0$ (3.11). D'autre part, comme $\rho = b_2$ [7.3.1 (b)], le polygone de Newton de $H^2(X/W) \otimes K$ est purement de pente 1, donc (2.17, 3.5) $H^2(W \Omega_X^2) = 0$, et par suite, grâce à 7.3.3(a) [ou (5.22.2)], $P^1 H^2(X/W) = H^1(W \Omega_X^1)$. Les valeurs de $H^1(W \Omega_X^1)$ sont donc fournies par la démonstration de 7.3.5. Comme $H^2(W \mathcal{O}_X)$ est donné par 7.3.2, il reste à calculer $H^1(W \Omega_X^2)$ et $H^2(W \Omega_X^1)$. La suite spectrale des pentes dégénérant en E_1 , on a une suite exacte [cf. (5.22.6)] :

$$(\star) \quad 0 \rightarrow H^1(W \Omega_X^2) \rightarrow H^3(X/W) \rightarrow H^2(W \Omega_X^1) \rightarrow 0.$$

Pour $p \neq 2$, on en déduit, grâce à 7.3.5, $H^1(W \Omega_X^2) = H^2(W \Omega_X^1) = 0$. Supposons $p = 2$. Alors $(\star)$ entraîne (grâce à 7.3.5) que l'on a $H^1(W \Omega_X^2) \simeq k$ ou $H^2(W \Omega_X^1) \simeq k$, et la valeur de $H^1(W \Omega_X^2)$ détermine celle de $H^2(W \Omega_X^1)$. Comme $H^2(W \Omega_X^2) \simeq W$, la suite exacte longue associée à la suite exacte $0 \rightarrow W \Omega_X^2 \xrightarrow{V} W \Omega_X^2 \rightarrow W \Omega_X^2 / V W \Omega_X^2 \rightarrow 0$ fournit, compte tenu de 2.1, 2.2, un isomorphisme

$$H^1(W \Omega_X^2) / V H^1(W \Omega_X^2) \xrightarrow[\leftarrow]{\sim} \varprojlim_{\mathbb{C}} H^1(\Omega_X^2).$$

Notons que le premier membre s'identifie à $H^1(W \Omega_X^2) / p H^1(W \Omega_X^2)$ car F est un automorphisme de $H^1(W \Omega_X^2)$ (2.18) et $V = p F^{-1}$. Si X est classique, $H^1(\Omega_X^2) = 0$ par dualité de Serre, donc $H^1(W \Omega_X^2) / p = 0$ et $H^1(W \Omega_X^2) = 0$. Si X est non classique, le système projectif $\varprojlim_{\mathbb{C}} H^1(\Omega_X^2)$ est dual du système inductif $\varinjlim_{\mathbb{F}} H^1(\mathcal{O}_X)$, donc de limite isomorphe à k si X est singulière, et nulle si X est supersingulière. On en conclut que $H^1(W \Omega_X^2) = k$ (resp. 0) si X est singulière (resp. supersingulière), ce qui achève la démonstration.

COROLLAIRE 7.3.7. — *Le discriminant de la forme d'intersection sur $NS(X)/\text{torsion}$ est -1 .*

Soit D ce discriminant. Comme $\rho = b_2 = 10$, D est une unité l -adique pour tout $l \neq p$. La signature de la forme d'intersection sur $NS(X) \otimes \mathbb{R}$ étant $(1, -1, \dots, -1)$ d'après le théorème de l'index, on a donc $D = -p^a$ pour un entier $a \geq 0$. Supposons $p \neq 2$. Le tableau 7.3.6(a) et (5.22.1) entraînent que $H^2(X, \mathbb{Z}_p(1))$ est libre de rang 10, et que les flèches canoniques $NS(X) \otimes W \rightarrow H^2(X, \mathbb{Z}_p(1)) \otimes W \rightarrow H^2(X/W)$ sont des isomorphismes : par suite D est une unité p -adique, donc $D = -1$. Supposons $p = 2$. Si X est classique, 7.3.6(b) (i) et (5.22.1) entraînent de la même manière que la flèche canonique $(NS(X)/\text{torsion}) \otimes W \rightarrow H^2(X/W)/\text{torsion}$ est un isomorphisme, donc on a encore $D = -1$ [puisque la forme cup-produit sur $H^2(X/W)/\text{torsion}$ est unimodulaire par dualité de Poincaré]. Si X est non classique, on voit de même que la flèche canonique

$$NS(X) \otimes W \rightarrow P^1 H^2(X/W)$$

est un isomorphisme, et comme $P^1 H^2(X/W) = H^2(X/W)/\text{torsion}$, $D = -1$, ce qui achève la démonstration.

PROPOSITION 7.3.8. — Si X est non supersingulière, la suite spectrale de Hodge $E_1^{ij} = H^j(\Omega_X^i) \Rightarrow H_{\text{DR}}^*(X/k)$ dégénère en E_1 et le terme E_1 est donné par les tableaux suivants :

(a) $p \neq 2$:

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & k \\ 0 & k^{10} & 0 \\ k & 0 & 0 \end{array}$$

(b) $p=2$: (i) X classique :

$$\begin{array}{ccc} 0 & k \xrightarrow{0} & k \\ 0 & k^{12} & 0 \\ k \xrightarrow{0} & k & 0 \end{array}$$

(ii) X singulière :

$$\begin{array}{ccc} k & 0 & k \\ k \xrightarrow{0} & k^{10} \xrightarrow{0} & k \\ k & 0 & k \end{array}$$

Si X est supersingulière, la suite spectrale de Hodge dégénère en E_2 , et le terme E_1 est donné par le tableau

(iii)

$$\begin{array}{ccc} k \xrightarrow{0} & k \xrightarrow{0} & k \\ k \rightarrow & k^{12} \rightarrow & k \\ k \xrightarrow{0} & k \xrightarrow{0} & k \end{array}$$

où les différentielles $H^1(\mathcal{O}_X) \xrightarrow{d_1} H^1(\Omega_X^1) \xrightarrow{d_1} H^1(\Omega_X^2)$ sont non nulles.

Les valeurs de $H^j(\Omega_X^i)$ pour $(i, j) \neq (1, 1)$ sont déterminées par 7.3.4 et la dualité de Serre. On sait d'autre part que les caractéristiques d'Euler-Poincaré d'un k -schéma projectif et lisse, calculées en cohomologie de De Rham ou en cohomologie l -adique ($l \neq p$), sont égales (SGA 5 VII 4.11), donc $\chi(\Omega_X^1) = 2\chi(\mathcal{O}_X) - 12 = -10$, d'où les valeurs de $H^1(\Omega_X^1)$ grâce à 7.3.4. On a trivialement $d_1^{00} = 0$, et, dualement, $d_1^{12} = 0$. De plus, d'après 7.3.3(b), on a $d_1^{10} = 0$, donc, dualement, $d_1^{02} = 0$. Par ailleurs, les suites exactes des coefficients universels

$$0 \rightarrow H^i(X/W) \otimes k \rightarrow H_{\text{DR}}^i(X/k) \rightarrow {}_p H^{i+1}(X/W) \rightarrow 0$$

fournissent, en vertu de 7.3.5, les valeurs suivantes pour H_{DR}^2 et H_{DR}^3 :

	$H_{\text{DR}}^2(X/k)$	$H_{\text{DR}}^3(X/k)$
$p \neq 2$	k^{10}	0
$p = 2$	k^{12}	k

Compte tenu des valeurs des $H^i(\Omega_X^i)$, on en conclut que la suite spectrale de Hodge dégénère en E_1 si X est classique ou singulière. Il reste à prouver que, si X est supersingulière, les différentielles d_1^{01} et d_1^{11} sont non nulles. Il revient au même de montrer que la flèche canonique $H^0(\Omega_X^2) \rightarrow H_{\text{DR}}^2(X/k)$ est injective, ou, par dualité, que la flèche canonique $H_{\text{DR}}^2(X/k) \rightarrow H^2(\mathcal{O}_X)$ est surjective. Or cette dernière s'insère dans un carré commutatif de flèches canoniques

$$\begin{array}{ccc} H^2(X/W) & \rightarrow & H_{\text{DR}}^2(X/k) \\ \downarrow (1) & & \downarrow \\ H^2(W/\mathcal{O}_X) & \xrightarrow{(2)} & H^2(\mathcal{O}_X) \end{array}$$

où (2) est trivialement surjective, et (1) l'est par 7.3.3(a) : elle est donc surjective, ce qui achève la démonstration.

Questions 7.3.9. — (a) Il serait intéressant de poursuivre l'étude précédente par celle de la cohomologie (de De Rham, resp. cristalline) du modèle minimal du revêtement double canonique de X défini par Bombieri-Mumford [16]. Dans certains cas, ce modèle est une K 3. Quels sont ses invariants (h , ρ , etc.) ?

(b) Si X est supersingulière, le fait que $\text{Pic}_{X/k} = \alpha_2$ entraîne, d'après le résultat de Raynaud [61], que X ne peut se relever (en une surface propre et lisse) sur W . Est-il vrai que X ne peut déjà se relever sur $W/4$? Plus précisément, l'obstruction à relever X (sans polarisation) sur $W/4$ est un élément de $H^2(T_X) \simeq H^2(\Omega_X^1) \simeq H^0(\Omega_X^1)^\vee \simeq k$. Est-il non nul ?

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. ARTIN, *Supersingular K 3 surfaces* (Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. 7, 1974, p. 543-568).
- [2] M. ARTIN et B. MAZUR, *Formal Groups Arising from Algebraic Varieties* (Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 4^e série, t. 10, 1977, p. 87-132).
- [3] G. M. BERGMAN, *Ring Schemes, the Witt Scheme, Lecture 26*, in *Lectures on Curves on an Algebraic Surface*, MUMFORD, Ann. Math. Studies, n° 59, Princeton University Press, 1966.
- [4] P. BERTHELOT, *Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$* (Lecture Notes in Math., n° 407, Springer, 1974).
- [5] P. BERTHELOT, *Sur le théorème de Lefschetz faible en cohomologie cristalline* (C.R. Acad. Sc., Paris, t. 277, série A, 1973, p. 955-958).
- [6] P. BERTHELOT, *Slopes of Frobenius in Crystalline Cohomology* (Proc. Symp. Pure Math., vol. XXIX, 1975, p. 315-328).
- [7] P. BERTHELOT, *Systèmes de Honda des schémas en F_q -vectoriels* (Bull. Soc. math. Fr., t. 105, 1977, p. 225-239).
- [8] P. BERTHELOT, Lettre à Nygaard, juin 1976.
- [9] P. BERTHELOT, *Dualité plate*, dans *Surfaces algébriques* [Séminaire de géométrie algébrique d'Orsay, 1976-1978 (en préparation)].

- [10] P. BERTHELOT et W. MESSING, *Théorie de Dieudonné cristalline I*, dans *Journées de géométrie algébrique de Rennes*, juillet 1978 (*Astérisque*, n° 63, 1979, p. 17-38).
- [11] P. BERTHELOT et A. OGUS, *Notes on Crystalline Cohomology* (*Mathematical Notes*, n° 21, Princeton University Press, 1978).
- [12] S. BLOCH, *Algebraic K-Theory and Crystalline Cohomology* (*Pub. Math. I.H.E.S.*, vol. 47, 1978, p. 187-268).
- [13] S. BLOCH, Lettre à Illusie, juillet 1976.
- [14] S. BLOCH, Lettre à Illusie, septembre 1978.
- [15] S. BLOCH, Lettre à Ogus, 1976.
- [16] E. BOMBIERI et D. MUMFORD, *Enriques Classification of Surfaces In Chart*, p. III (*Invent. Math.*, vol. 35, 1976, p. 197-232).
- [17] L. BREEN, *Rapport sur les théories de Dieudonné*, dans *Journées de géométrie algébrique de Rennes*, juillet 1978 (*Astérisque*, n° 63, 1979, p. 39-66).
- [18] P. CARTIER, *Questions de rationalité des diviseurs en géométrie algébrique* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 86, 1958, p. 177-251).
- [19] P. CARTIER, *Groupes formels associés aux anneaux de Witt généralisés* (*C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 265, série A, 1967, p. 50-52).
- [20] P. DELIGNE, *Théorème de Lefschetz et critères de dégénérescence de suites spectrales* (*Pub. math. I.H.E.S.*, vol. 35, 1968, p. 107-126).
- [21] P. DELIGNE, *V-complexes de De Rham*, notes manuscrites, 1975.
- [22] M. DEMAZURE, *Lectures on p-Divisible Groups* (*Lecture Notes in Math.*, n° 302, 1972, Springer-Verlag).
- [23] M. DEMAZURE et P. GABRIEL, *Groupes algébriques*, t. 1, Masson, Paris et North-Holland Pub. Co., 1970.
- [24] J.-M. FONTAINE, *Groupes p-divisibles sur les corps locaux* (*Astérisque*, n° 47-48, Société mathématique de France, 1977).
- [25] J.-M. FONTAINE, *Groupes finis commutatifs sur les vecteurs de Witt* (*C.R. Acad. Sc.*, Paris, t. 280, série A, 1975, p. 1423-1425).
- [26] J.-M. FONTAINE, *Groupes p-divisibles et modules de Hodge-Tate*, dans *Journées de géométrie algébrique de Rennes*, juillet 78 (*Astérisque*, n° 65, 1979, p. 3-80).
- [27] J. GIRAUD, L. ILLUSIE et M. RAYNAUD, *Séminaire de géométrie algébrique d'Orsay 1976-1978 sur les surfaces algébriques* (en préparation).
- [28] A. GROTHENDIECK, *Techniques de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique, VI, Les schémas de Picard* (*Séminaire Bourbaki*, exp. 236, 1962).
- [29] A. GROTHENDIECK, *Le groupe de Brauer I, II, III*, dans *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, Masson, Paris et North-Holland Pub. Co., 1968.
- [30] A. GROTHENDIECK, *Sur l'opération de Cartier*, notes manuscrites.
- [31] R. T. HOOBLER, *Cohomology of Purely Inseparable Galois Coverings* (*J. reine angew. Math.*, vol. 266; 1974, p. 183-199).
- [32] L. ILLUSIE, *Complexe cotangent et déformations I, II* (*Lecture Notes in Math.*, n°s 239, 283, Springer-Verlag, 1972).
- [33] L. ILLUSIE, *Report on Crystalline Cohomology* (*Proc. Symp. Pure Math.*, vol. XXIX, 1975, p. 459-478).
- [34] L. ILLUSIE, *Cohomologie cristalline, d'après P. Berthelot* [*Sém. Bourbaki*, exp. 456 (*Lecture Notes in Math.*, n° 514, Springer-Verlag, 1976)].
- [35] L. ILLUSIE, *Complexe de De Rham-Witt et cohomologie cristalline*, notes d'un cours à Orsay, 1976.
- [36] L. ILLUSIE, *Complexe de De Rham-Witt*, dans *Journées de géométrie algébrique de Rennes*, juillet 1978 (*Astérisque*, n° 63, 1979, p. 83-112).
- [37] L. ILLUSIE et M. RAYNAUD, *Suites spectrales des pentes et décompositions de Hodge-Witt* (en préparation).
- [38] T. KATSURA et T. SHIODA, *On Fermat Varieties* (*Tohoku Math. J.*, vol. 31, 1979, p. 97-115).
- [39] N. KATZ, *Nilpotent Connections and the Monodromy Theorem* (*Pub. Math. I.H.E.S.*, vol. 39, 1970, p. 175-232).
- [40] N. KATZ, *Travaux de Dwork* [*Séminaire Bourbaki*, exp. 409 (*Lecture Notes in Math.*, n° 383, Springer-Verlag, 1973)].
- [41] N. KATZ, *Algebraic Solutions of Differential Equations, p-Curvature and the Hodge Filtration* (*Invent. Math.*, vol. 18, 1972, p. 1-118).
- [42] N. KATZ, *Slope Filtration of F-crystals*, dans *Journées de géométrie algébrique de Rennes*, juillet 1978 (*Astérisque*, n° 63, 1979, p. 113-164).

- [43] N. KATZ et W. MESSING, *Some Consequences of the Riemann Hypothesis for Varieties Over Finite Fields* (*Invent. Math.*, vol. 23, 1974, p. 73-77).
- [44] W. E. LANG, *Quasi-Elliptic Surfaces in Characteristic Three* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4^e série, t. 12, 1979, p. 481-508).
- [45] M. LAZARD, *Commutative Formal Groups* (*Lecture Notes in Math.*, n° 443, Springer-Verlag, 1975).
- [46] S. LUBKIN, *Generalization of p -adic Cohomology, Bounded Witt vectors* (*Compositio Math.*, vol. 34, 1977, p. 225-277).
- [47] Y. MANIN, *The Theory of Commutative Formal groups Over Fields of Finite Characteristic* (*Russian Math. Surveys*, vol. 18, 1963, p. 1-83).
- [48] B. MAZUR, *Frobenius and the Hodge Filtration* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, 78, 1972, p. 653-667).
- [49] B. MAZUR, *Frobenius and the Hodge Filtration, estimates* (*Ann. of Math.*, vol. 98, 1973, p. 58-95).
- [50] B. MAZUR et W. MESSING, *Universal Extensions and One Dimensional Crystalline Cohomology* (*Lecture Notes in Math.*, n° 370, Springer-Verlag, 1974).
- [51] J. MILNE, *Duality in the Flat Cohomology of a Surface* (*Ann. scient. Éc. Norm. sup.*, 4^e série, t. 9, 1976, p. 171-202).
- [52] D. MUMFORD, *Lectures on Curves on an algebraic Surface* (*Ann. Math. Studies*, vol. 59, Princeton University Press, 1966).
- [53] D. MUMFORD, *Pathologies of Modular Algebraic Surfaces* (*Amer. J. Math.*, vol. 83, 1961, p. 339-342).
- [54] N. NYGAARD, *Closedness of Regular 1-Forms on Algebraic Surfaces* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 4^e série, t. 12, 1979, p. 33-45).
- [55] N. NYGAARD, *A p -Adic Proof of the Rudakov-Shafarevitch Theorem* [*Ann. of Math.* (à paraître)].
- [56] T. ODA, *The First de Rham Cohomology Group and Dieudonné Modules* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, 3^e série, t. 2, 1969, p. 63-135).
- [57] T. ODA et F. OORT, *Supersingular Abelian Varieties* (*Int. Symp. on Algebraic Geometry*, Kyoto, 1977, p. 595-621).
- [58] A. OGUS, *Cohomology of the Infinitesimal Site* (*Ann. scient. Éc. Norm. Sup.*, t. 8, 1975, p. 295-318).
- [59] A. OGUS, *F-Crystals and Griffiths Transversality* (*Proc. of the International Symp. in Alg. Geometry at Kyoto* 1977, p. 15-44).
- [60] A. OGUS, *Supersingular K 3 Crystals*, dans *Journées de géométrie algébrique de Rennes*, juillet 1978 (*Astérisque*, n° 64, p. 3-86).
- [61] M. RAYNAUD, « p -torsion » du schéma de Picard, dans *Journées de géométrie algébrique de Rennes*, juillet 1978 (*Astérisque*, n° 64, 1979, p. 87-148).
- [62] M. RAYNAUD, *Schémas en groupes de type $(p, \dots, p)$* (*Bull. Soc. math. Fr.*, t. 102, 1974, p. 241-280).
- [63] M. RAYNAUD, *Sur les formes indéfiniment fermées*, notes manuscrites.
- [64] A. N. RUDAKOV et I. R. SHAFAREVITCH, *Inseparable Morphisms of Algebraic Surfaces* (*Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R.*, vol. 40, 1976, p. 1269-1307, et *Math. U.S.S.R. Izv.*, vol. 10, 1976, p. 1205-1237).
- [65] J.-P. SERRE, *Corps locaux*, Hermann, Paris, 1962.
- [66] J.-P. SERRE, *Sur la topologie des variétés algébriques en caractéristique p* (*Symposium Internacional de Topologia Algebraica*, México, 1958, p. 24-53).
- [67] J.-P. SERRE, *Groupes proalgébriques* (*Pub. math. I.H.E.S.*, vol. 7, 1960, p. 341-403).
- [68] C. S. SESHADRI, *L'opération de Cartier, applications*, dans *Variétés de Picard* (*Séminaire Chevalley* 1958/1959, Secr. math., Paris, 1960).
- [69] T. SHIODA, *Algebraic Cycles on Certain K 3 Surfaces in Characteristic p* (*Proc. Int. Conf. on Manifolds*, Tokyo, 1973, p. 357-364, University Tokyo Press, 1975).
- [SGA 4] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, par M. ARTIN, A. GROTHENDIECK et J.-L. VERDIER, *Lecture Notes in Math.*, n°s 269, 270, 305, Springer-Verlag, 1972-1973.
- [SGA 5] *Cohomologie χ -adique et fonctions L*, par A. GROTHENDIECK, *Lecture Notes in Math.*, n° 589, Springer-Verlag, 1977.
- [SGA 6] *Théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch*, par P. BERTHELOT, A. GROTHENDIECK et L. ILLUSIE, *Lecture Notes in Math.*, n° 225, Springer-Verlag, 1971.

Luc ILLUSIE,
U.E.R. de Mathématiques,
91405 Orsay.

(Manuscrit reçu le 9 février 1979
révisé le 12 juillet 1979.)